Problemas con Dígitos II

Jorge Tipe Villanueva

Lima, agosto de 2010

XXVIII Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana

Recordando...

$S(n)$ denota la suma de dígitos del número n.

Recordando...

$S(n)$ denota la suma de dígitos del número n.
En la primera sesión vimos las siguientes desigualdades:

$$S(a+b) \leq S(a) + S(b)$$

$$S(ab) \leq S(a)S(b)$$

válidas para todos los enteros positivos a y b.

Recordando...

Usando las desigualdades anteriores se demostró:

- El mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(2n)}$ es

Recordando...

Usando las desigualdades anteriores se demostró:

- El mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(2n)}$ es 5.

Recordando...

Usando las desigualdades anteriores se demostró:

- El mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(2n)}$ es 5.
- El mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(4n)}$ es

Recordando...

Usando las desigualdades anteriores se demostró:

- El mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(2n)}$ es 5.
- El mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(4n)}$ es 7.

Recordando...

Usando las desigualdades anteriores se demostró:

- El mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(2n)}$ es 5.
- El mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(4n)}$ es 7.

¿Cuál será el mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(3n)}$?

Recordando...

Usando las desigualdades anteriores se demostró:

- El mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(2n)}$ es 5.
- El mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(4n)}$ es 7.

¿Cuál será el mayor valor que puede tomar la expresión $\dfrac{S(n)}{S(3n)}$?

¡La respuesta no es 6!

La respuesta es:

La respuesta es: La expresión $\dfrac{S(n)}{S(3n)}$ puede tomar valores arbitrariamente grandes.

La respuesta es: La expresión $\dfrac{S(n)}{S(3n)}$ puede tomar valores arbitrariamente grandes.

Para $n = 34$ la expresión es igual a $\dfrac{S(34)}{S(102)} = 2{,}33\ldots$

La respuesta es: La expresión $\dfrac{S(n)}{S(3n)}$ puede tomar valores arbitrariamente grandes.

Para $n = 34$ la expresión es igual a $\dfrac{S(34)}{S(102)} = 2{,}33\ldots$

Para $n = 334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(334)}{S(1002)} = 3{,}33\ldots$

La respuesta es: La expresión $\dfrac{S(n)}{S(3n)}$ puede tomar valores arbitrariamente grandes.

Para $n = 34$ la expresión es igual a $\dfrac{S(34)}{S(102)} = 2{,}33\ldots$

Para $n = 334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(334)}{S(1002)} = 3{,}33\ldots$

Para $n = 3334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(3334)}{S(10002)} = 4{,}33\ldots$

La respuesta es: La expresión $\dfrac{S(n)}{S(3n)}$ puede tomar valores arbitrariamente grandes.

Para $n = 34$ la expresión es igual a $\dfrac{S(34)}{S(102)} = 2{,}33\ldots$

Para $n = 334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(334)}{S(1002)} = 3{,}33\ldots$

Para $n = 3334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(3334)}{S(10002)} = 4{,}33\ldots$

Para $n = 33334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(33334)}{S(100002)} = 5{,}33\ldots$

La respuesta es: La expresión $\dfrac{S(n)}{S(3n)}$ puede tomar valores arbitrariamente grandes.

Para $n = 34$ la expresión es igual a $\dfrac{S(34)}{S(102)} = 2{,}33\ldots$

Para $n = 334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(334)}{S(1002)} = 3{,}33\ldots$

Para $n = 3334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(3334)}{S(10002)} = 4{,}33\ldots$

Para $n = 33334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(33334)}{S(100002)} = 5{,}33\ldots$

Para $n = 333334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(333334)}{S(1000002)} = 6{,}33\ldots$

La respuesta es: La expresión $\dfrac{S(n)}{S(3n)}$ puede tomar valores arbitrariamente grandes.

Para $n = 34$ la expresión es igual a $\dfrac{S(34)}{S(102)} = 2{,}33\dots$

Para $n = 334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(334)}{S(1002)} = 3{,}33\dots$

Para $n = 3334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(3334)}{S(10002)} = 4{,}33\dots$

Para $n = 33334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(33334)}{S(100002)} = 5{,}33\dots$

Para $n = 333334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(333334)}{S(1000002)} = 6{,}33\dots$

Para $n = 3333334$ la expresión es igual a $\dfrac{S(3333334)}{S(10000002)} = 7{,}33\dots$

En general, si

$$n = \underbrace{333\ldots34}_{k\text{dígitos}}$$

se cumple que

$$\frac{S(n)}{S(3n)} = k + \frac{1}{3}.$$

En general, si

$$n = \underbrace{333\ldots34}_{k\text{dígitos}}$$

se cumple que

$$\frac{S(n)}{S(3n)} = k + \frac{1}{3}.$$

Esto significa que la expresión $\dfrac{S(n)}{S(3n)}$ puede tomar valores arbitrariamente grandes.

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Vamos a asumir que ya hemos demostrado la desigualdad:

$$S(a+b) \leq S(a) + S(b),$$

que tiene dos variables.

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Vamos a asumir que ya hemos demostrado la desigualdad:

$$S(a+b) \leq S(a) + S(b),$$

que tiene dos variables.
Se puede establecer una desigualdad análoga para tres variables:

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Vamos a asumir que ya hemos demostrado la desigualdad:

$$S(a+b) \leq S(a) + S(b),$$

que tiene dos variables.
Se puede establecer una desigualdad análoga para tres variables:

$$\begin{aligned} S(a+b+c) &= S(a+(b+c)) \\ &\leq S(a) + S(b+c) \\ &\leq S(a) + S(b) + S(c) \end{aligned}$$

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Vamos a asumir que ya hemos demostrado la desigualdad:

$$S(a+b) \leq S(a) + S(b),$$

que tiene dos variables.
Se puede establecer una desigualdad análoga para tres variables:

$$\begin{aligned} S(a+b+c) &= S(a+(b+c)) \\ &\leq S(a) + S(b+c) \\ &\leq S(a) + S(b) + S(c) \end{aligned}$$

en general, se puede probar que:

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Vamos a asumir que ya hemos demostrado la desigualdad:

$$S(a+b) \leq S(a) + S(b),$$

que tiene dos variables.
Se puede establecer una desigualdad análoga para tres variables:

$$\begin{aligned} S(a+b+c) &= S(a+(b+c)) \\ &\leq S(a) + S(b+c) \\ &\leq S(a) + S(b) + S(c) \end{aligned}$$

en general, se puede probar que:

$$S(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \leq S(a_1) + S(a_2) + \cdots + S(a_k)$$

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Por otro lado, aplicando nuevamente la desigualdad $S(a+b) \leq S(a) + S(b)$, obtenemos:

$$S(2b) \leq S(b) + S(b) = 2S(b)$$

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Por otro lado, aplicando nuevamente la desigualdad $S(a+b) \leq S(a) + S(b)$, obtenemos:

$$S(2b) \leq S(b) + S(b) = 2S(b)$$

$$S(3b) = S(b+2b) \leq S(b) + S(2b) \leq 3S(b)$$

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Por otro lado, aplicando nuevamente la desigualdad $S(a+b) \leq S(a) + S(b)$, obtenemos:

$$S(2b) \leq S(b) + S(b) = 2S(b)$$

$$S(3b) = S(b+2b) \leq S(b) + S(2b) \leq 3S(b)$$

$$S(4b) = S(b+3b) \leq S(b) + S(3b) \leq 4S(b)$$

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Por otro lado, aplicando nuevamente la desigualdad $S(a+b) \leq S(a) + S(b)$, obtenemos:

$$S(2b) \leq S(b) + S(b) = 2S(b)$$

$$S(3b) = S(b+2b) \leq S(b) + S(2b) \leq 3S(b)$$

$$S(4b) = S(b+3b) \leq S(b) + S(3b) \leq 4S(b)$$

y así sucesivamente, se puede probar que:

$$S(ab) \leq aS(b).$$

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Por otro lado, aplicando nuevamente la desigualdad $S(a+b) \leq S(a) + S(b)$, obtenemos:

$$S(2b) \leq S(b) + S(b) = 2S(b)$$

$$S(3b) = S(b + 2b) \leq S(b) + S(2b) \leq 3S(b)$$

$$S(4b) = S(b + 3b) \leq S(b) + S(3b) \leq 4S(b)$$

y así sucesivamente, se puede probar que:

$$S(ab) \leq aS(b).$$

que es una desigualdad parecida a la que queremos obtener.

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Por otro lado, aplicando nuevamente la desigualdad $S(a+b) \leq S(a) + S(b)$, obtenemos:

$$S(2b) \leq S(b) + S(b) = 2S(b)$$

$$S(3b) = S(b+2b) \leq S(b) + S(2b) \leq 3S(b)$$

$$S(4b) = S(b+3b) \leq S(b) + S(3b) \leq 4S(b)$$

y así sucesivamente, se puede probar que:

$$S(ab) \leq aS(b).$$

que es una desigualdad parecida a la que queremos obtener. (Notemos que si a tuviera solamente un dígito la desigualdad ya estaría demostrada.)

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Sean $a = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ y b enteros positivos.

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Sean $a = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ y b enteros positivos.

$$a = \overline{a_1 00 \cdots 0} + \overline{a_2 00 \cdots 0} + \cdots + \overline{a_k}$$

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Sean $a = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ y b enteros positivos.

$$a = \overline{a_1 00 \cdots 0} + \overline{a_2 00 \cdots 0} + \cdots + \overline{a_k}$$

$$ab = (\overline{a_1 00 \cdots 0})b + (\overline{a_2 00 \cdots 0})b + \cdots + (\overline{a_k})b$$

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Sean $a = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ y b enteros positivos.

$$a = \overline{a_1 00 \cdots 0} + \overline{a_2 00 \cdots 0} + \cdots + \overline{a_k}$$

$$ab = (\overline{a_1 00 \cdots 0})b + (\overline{a_2 00 \cdots 0})b + \cdots + (\overline{a_k})b$$

$$S(ab) \leq S((\overline{a_1 00 \cdots 0})b) + S((\overline{a_2 00 \cdots 0})b) + \cdots + S((\overline{a_k})b)$$

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Sean $a = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ y b enteros positivos.

$$a = \overline{a_1 00 \cdots 0} + \overline{a_2 00 \cdots 0} + \cdots + \overline{a_k}$$

$$ab = (\overline{a_1 00 \cdots 0})b + (\overline{a_2 00 \cdots 0})b + \cdots + (\overline{a_k})b$$

$$S(ab) \leq S((\overline{a_1 00 \cdots 0})b) + S((\overline{a_2 00 \cdots 0})b) + \cdots + S((\overline{a_k})b)$$

$$S(ab) \leq S(a_1 b) + S(a_2 b) + \cdots + S(a_k b)$$

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Sean $a = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ y b enteros positivos.

$$a = \overline{a_1 00 \cdots 0} + \overline{a_2 00 \cdots 0} + \cdots + \overline{a_k}$$

$$ab = (\overline{a_1 00 \cdots 0})b + (\overline{a_2 00 \cdots 0})b + \cdots + (\overline{a_k})b$$

$$S(ab) \leq S((\overline{a_1 00 \cdots 0})b) + S((\overline{a_2 00 \cdots 0})b) + \cdots + S((\overline{a_k})b)$$

$$S(ab) \leq S(a_1 b) + S(a_2 b) + \cdots + S(a_k b)$$

pero

$$S(a_1 b) + S(a_2 b) + \cdots + S(a_k b) \leq a_1 S(b) + a_2 S(b) + \cdots + a_k S(b)$$

(por la propiedad que ya demostramos), por lo tanto:

Otra demostración de $S(ab) \leq S(a)S(b)$

Sean $a = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ y b enteros positivos.

$$a = \overline{a_1 00 \cdots 0} + \overline{a_2 00 \cdots 0} + \cdots + \overline{a_k}$$

$$ab = (\overline{a_1 00 \cdots 0})b + (\overline{a_2 00 \cdots 0})b + \cdots + (\overline{a_k})b$$

$$S(ab) \leq S((\overline{a_1 00 \cdots 0})b) + S((\overline{a_2 00 \cdots 0})b) + \cdots + S((\overline{a_k})b)$$

$$S(ab) \leq S(a_1 b) + S(a_2 b) + \cdots + S(a_k b)$$

pero

$$S(a_1 b) + S(a_2 b) + \cdots + S(a_k b) \leq a_1 S(b) + a_2 S(b) + \cdots + a_k S(b)$$

(por la propiedad que ya demostramos), por lo tanto:

$$S(ab) \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)S(b) = S(a)S(b)$$

Algunos problemas relacionados con divisibilidad

Hay dos criterios de divisibilidad que están relacionados con la suma de dígitos:

- Criterio de Divisibilidad por 3:

Algunos problemas relacionados con divisibilidad

Hay dos criterios de divisibilidad que están relacionados con la suma de dígitos:

- Criterio de Divisibilidad por 3:
  n es múltiplo de 3 $\Longleftrightarrow$ $S(n)$ es múltiplo de 3.

Algunos problemas relacionados con divisibilidad

Hay dos criterios de divisibilidad que están relacionados con la suma de dígitos:

- Criterio de Divisibilidad por 3:
  n es múltiplo de 3 $\Longleftrightarrow$ $S(n)$ es múltiplo de 3.
- Criterio de Divisibilidad por 9:

Algunos problemas relacionados con divisibilidad

Hay dos criterios de divisibilidad que están relacionados con la suma de dígitos:

- Criterio de Divisibilidad por 3:
  n es múltiplo de 3 $\Longleftrightarrow$ $S(n)$ es múltiplo de 3.
- Criterio de Divisibilidad por 9:
  n es múltiplo de 9 $\Longleftrightarrow$ $S(n)$ es múltiplo de 9.

Algunos problemas relacionados con divisibilidad

Hay dos criterios de divisibilidad que están relacionados con la suma de dígitos:

- Criterio de Divisibilidad por 3:
  n es múltiplo de 3 $\iff S(n)$ es múltiplo de 3.
- Criterio de Divisibilidad por 9:
  n es múltiplo de 9 $\iff S(n)$ es múltiplo de 9.

Es importante mencionar que estos criterios son válidos en base 10. Si cambiamos de base, los criterios de divisibilidad también cambian.

Ejemplo

Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $S(9n)$ *?*

Algunos problemas relacionados con divisibilidad

Ejemplo

Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $S(9n)$?

Ejemplo

Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $S(4n)$?

Ejemplo

Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $S(9n)$ *?*

Ejemplo

Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $S(4n)$ *?*

Ejemplo

Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $S(125n)$ *?*

Ejemplo

Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $S(7n)$?

Ejemplo

Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $S(7n)$?

¿Será posible que $S(7n) = 1$?

Ejemplo

Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $S(7n)$?

¿Será posible que $S(7n) = 1$?
Para que $S(7n) = 1$, tendría que ocurrir que $7n = 10^k$, lo cual no es posible.
Para que $S(7n) = 2$, tendría que ocurrir que $7n = 10\ldots010\ldots0$ o también $7n = 10\ldots01$.

Ejemplo

Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $S(7n)$?

¿Será posible que $S(7n) = 1$?
Para que $S(7n) = 1$, tendría que ocurrir que $7n = 10^k$, lo cual no es posible.
Para que $S(7n) = 2$, tendría que ocurrir que $7n = 10\ldots010\ldots0$ o también $7n = 10\ldots01$.
¿7 tiene un múltiplo de esa forma?

Ejemplo

Si n es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor que puede tomar $S(7n)$?

¿Será posible que $S(7n) = 1$?
Para que $S(7n) = 1$, tendría que ocurrir que $7n = 10^k$, lo cual no es posible.
Para que $S(7n) = 2$, tendría que ocurrir que $7n = 10\ldots010\ldots0$ o también $7n = 10\ldots01$.
¿7 tiene un múltiplo de esa forma?
Sí, por ejemplo $7 \times (143) = 1001$. Por lo tanto, el menor valor que puede tomar $S(7n)$ es 2.

Ejemplo

Si n es un entero positivo, el menor valor que puede tomar $S(11n)$ es 2.

Algunos problemas relacionados con divisibilidad

Ejemplo

Si n es un entero positivo, el menor valor que puede tomar $S(11n)$ es 2.

Ejemplo

Si n es un entero positivo, el menor valor que puede tomar $S(13n)$ es 2.

Ejemplo

Si n es un entero positivo, el menor valor que puede tomar $S(11n)$ es 2.

Ejemplo

Si n es un entero positivo, el menor valor que puede tomar $S(13n)$ es 2.

Veamos un problema tomado en Argentina:

Ejemplo

(Selectivo para la Olimpiada del Cono Sur, 2009)
Sea k un entero positivo. Determine en función de k el menor valor que puede tomar la expresión $S(\underbrace{11\cdots1}_{k veces}n)$.

Ejemplo

Si n es un entero positivo, el menor valor que puede tomar $S(11n)$ es 2.

Ejemplo

Si n es un entero positivo, el menor valor que puede tomar $S(13n)$ es 2.

Veamos un problema tomado en Argentina:

Ejemplo

(Selectivo para la Olimpiada del Cono Sur, 2009)
Sea k un entero positivo. Determine en función de k el menor valor que puede tomar la expresión $S(\underbrace{11\cdots1}_{k\,veces}n)$.

Se demuestra que el menor valor es k y se consigue, por ejemplo, para $n = 1$.

Algunos problemas relacionados con divisibilidad

Analicemos ahora la suma de dígitos de números consecutivos, es decir, $S(n)$ y $S(n+1)$.

Ejemplo

¿Es posible que $S(n)$ y $S(n+1)$ sean pares?

Analicemos ahora la suma de dígitos de números consecutivos, es decir, $S(n)$ y $S(n+1)$.

Ejemplo

¿Es posible que $S(n)$ y $S(n+1)$ sean pares?

Sí por ejemplo, para $n = 19$.

Algunos problemas relacionados con divisibilidad

Analicemos ahora la suma de dígitos de números consecutivos, es decir, $S(n)$ y $S(n+1)$.

Ejemplo

¿Es posible que $S(n)$ y $S(n+1)$ sean pares?

Sí por ejemplo, para $n = 19$.

Ejemplo

¿Es posible que $S(n)$ y $S(n+1)$ sean ambos múltiplos de 3?

Analicemos ahora la suma de dígitos de números consecutivos, es decir, $S(n)$ y $S(n+1)$.

Ejemplo

¿Es posible que $S(n)$ y $S(n+1)$ sean pares?

Sí por ejemplo, para $n = 19$.

Ejemplo

¿Es posible que $S(n)$ y $S(n+1)$ sean ambos múltiplos de 3?

No, por el criterio de divisibilidad por 3.

Ejemplo

¿Es posible que $S(n)$ y $S(n+1)$ sean ambos múltiplos de 4?

Analicemos ahora la suma de dígitos de números consecutivos, es decir, $S(n)$ y $S(n+1)$.

Ejemplo

¿Es posible que $S(n)$ y $S(n+1)$ sean pares?

Sí por ejemplo, para $n = 19$.

Ejemplo

¿Es posible que $S(n)$ y $S(n+1)$ sean ambos múltiplos de 3?

No, por el criterio de divisibilidad por 3.

Ejemplo

¿Es posible que $S(n)$ y $S(n+1)$ sean ambos múltiplos de 4?

Sí, por ejemplo, para $n = 39$.

Ejemplo

Determine el menor entero positivo n para el cual los números $S(n)$ y $S(n+1)$ son ambos múltiplos de 7.