Problemas con Dígitos

Claudio Vicente Espinoza Choqquepura

Lima, agosto de 2010

Al enfrentar problemas que involucran los dígitos de un entero positivo, sabemos antes de resolver el problema dos cosas: El primer dígito del número es significativo, es decir distinto de 0, y además cada uno de los dígitos está en el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, asumiendo que estemos usando la representación decimal del número. El propósito de esta presentación es resaltar algunos resultados más que se pueden utilizar para solucionar este tipo de problemas.

Uso de Desigualdades

Consideremos el siguiente problema introductorio de la AMC(American Mathematics Competition):

Uso de Desigualdades

Consideremos el siguiente problema introductorio de la AMC(American Mathematics Competition):

Ejemplo

Hallar todos los números enteros positivos menores que 1000 que son iguales a seis veces su suma de dígitos.

Uso de Desigualdades

El primer dato nos dice que los números tienen a lo más 3 cifras, luego estamos en capacidad de analizar cada caso:

Uso de Desigualdades

El primer dato nos dice que los números tienen a lo más 3 cifras, luego estamos en capacidad de analizar cada caso:

- Si el número fuese de la forma $\overline{abc}$, entonces necesitamos resolver

$$\overline{abc} = 6(a + b + c)$$

Uso de Desigualdades

El primer dato nos dice que los números tienen a lo más 3 cifras, luego estamos en capacidad de analizar cada caso:

- Si el número fuese de la forma $\overline{abc}$, entonces necesitamos resolver

$$\begin{aligned} & \overline{abc} = 6(a+b+c) \\ \Longrightarrow \quad & 100a + 10b + c = 6a + 6b + 6c \end{aligned}$$

Uso de Desigualdades

El primer dato nos dice que los números tienen a lo más 3 cifras, luego estamos en capacidad de analizar cada caso:

- Si el número fuese de la forma $\overline{abc}$, entonces necesitamos resolver

$$\begin{aligned} & \overline{abc} = 6(a+b+c) \\ \Longrightarrow \quad & 100a + 10b + c = 6a + 6b + 6c \\ \Longrightarrow \quad & 94a + 4b = 5c. \end{aligned}$$

El primer dato nos dice que los números tienen a lo más 3 cifras, luego estamos en capacidad de analizar cada caso:

- Si el número fuese de la forma $\overline{abc}$, entonces necesitamos resolver

$$\begin{aligned} & \overline{abc} = 6(a+b+c) \\ \implies \quad & 100a + 10b + c = 6a + 6b + 6c \\ \implies \quad & 94a + 4b = 5c. \end{aligned}$$

  Luego como $a \geq 1$, pues es primer dígito, entonces $5c \geq 94$ lo cual es un absurdo pues $5c$ es a lo más 45.

Uso de Desigualdades

- Si el número fuese de la forma $\overline{ab}$, entonces nos queda la ecuación

$$\overline{ab} = 6(a + b)$$

Uso de Desigualdades

- Si el número fuese de la forma $\overline{ab}$, entonces nos queda la ecuación

$$\overline{ab} = 6(a+b) \Longrightarrow$$

Uso de Desigualdades

- Si el número fuese de la forma $\overline{ab}$, entonces nos queda la ecuación

$$\overline{ab} = 6(a + b) \Longrightarrow 10a + b = 6a + 6b$$

Uso de Desigualdades

- Si el número fuese de la forma $\overline{ab}$, entonces nos queda la ecuación

$$\overline{ab} = 6(a+b) \Longrightarrow 10a + b = 6a + 6b \Longrightarrow 4a = 5b$$

Ahora tenemos que a es un dígito, distinto de cero pues es primera cifra, que es múltiplo de 5. Luego $a = 5$ y por la tanto $b = 4$ y el único número en este caso es 54.

Uso de Desigualdades

- Si el número fuese de la forma $\overline{ab}$, entonces nos queda la ecuación

$$\overline{ab} = 6(a+b) \Longrightarrow 10a + b = 6a + 6b \Longrightarrow 4a = 5b$$

  Ahora tenemos que a es un dígito, distinto de cero pues es primera cifra, que es múltiplo de 5. Luego $a = 5$ y por la tanto $b = 4$ y el único número en este caso es 54.

- Si el número es de un dígito nos queda $a = 6a$, luego aqui no hay soluciones enteras positivas.

Uso de Desigualdades

- Si el número fuese de la forma $\overline{ab}$, entonces nos queda la ecuación

$$\overline{ab} = 6(a+b) \Longrightarrow 10a + b = 6a + 6b \Longrightarrow 4a = 5b$$

  Ahora tenemos que a es un dígito, distinto de cero pues es primera cifra, que es múltiplo de 5. Luego $a = 5$ y por la tanto $b = 4$ y el único número en este caso es 54.

- Si el número es de un dígito nos queda $a = 6a$, luego aqui no hay soluciones enteras positivas.

Por lo tanto el único número que cumple es 54.$\square$

En este problema, el primer dato que hemos utilizado es que los números eran menores que 1000, es decir nos decían de manera tácita la cantidad de dígitos que podía tener el número, con lo cual sólo teníamos que resolver algunas ecuaciones lineales, como ocurre en varios problemas. Ahora que hubiese pasado si no nos daban la cantidad de dígitos, incluso aunque analicemos los primeros casos no podríamos resolver completamente el problema si antes no acotamos la cantidad de cifras del número en cuestión. La siguiente proposición puede ser útil para estos casos:

Proposición

Sean $C(n)$ y $S(n)$ la cantidad de dígitos y la suma de dígitos del número n respectivamente, entonces

$$10^{C(n)-1} \leq n < 10^{C(n)} \text{ y } S(n) \leq 9C(n)$$

Uso de Desigualdades

Proposición

Sean $C(n)$ *y* $S(n)$ *la cantidad de dígitos y la suma de dígitos del número* n *respectivamente, entonces*

$$10^{C(n)-1} \leq n < 10^{C(n)} \text{ y } S(n) \leq 9C(n)$$

Uso de Desigualdades

Usemos el resultado anterior para generalizar el problema anterior

Usemos el resultado anterior para generalizar el problema anterior

Ejemplo

Hallar todos los números enteros positivos que son iguales a seis veces su suma de dígitos.

Solución

Solución

Sea n uno de dichos números y sean k y S la cantidad y suma de dígitos de n.

Solución

Sea n uno de dichos números y sean k y S la cantidad y suma de dígitos de n.Por el resultado anterior tenemos

$$10^{k-1} \leq n \text{ y } S \leq 9k.$$

Por condición del problema $n = 6S$, entonces

$$10^{k-1} \leq 6S \leq 54k$$

Uso de Desigualdades

Solución

Sea n uno de dichos números y sean k y S la cantidad y suma de dígitos de n.Por el resultado anterior tenemos

$$10^{k-1} \leq n \text{ y } S \leq 9k.$$

Por condición del problema $n = 6S$, entonces

$$10^{k-1} \leq 6S \leq 54k$$

Notemos que $10^3 > 54 \times 4$, supongamos que $10^{m-1} > 54m$ para algún $m > 3$, entonces

$$10^m = 10^{m-1} \times 10 > 540m > 54(m+1).$$

Solución

Sea n uno de dichos números y sean k y S la cantidad y suma de dígitos de n.Por el resultado anterior tenemos

$$10^{k-1} \leq n \text{ y } S \leq 9k.$$

Por condición del problema $n = 6S$, entonces

$$10^{k-1} \leq 6S \leq 54k$$

Notemos que $10^3 > 54 \times 4$, supongamos que $10^{m-1} > 54m$ para algún $m > 3$, entonces

$$10^m = 10^{m-1} \times 10 > 540m > 54(m+1).$$

Luego por el principio de inducción matemática $10^{m-1} > 54m$ para todo $m \geq 4$.

Solución

Sea n uno de dichos números y sean k y S la cantidad y suma de dígitos de n.Por el resultado anterior tenemos

$$10^{k-1} \leq n \text{ y } S \leq 9k.$$

Por condición del problema $n = 6S$, entonces

$$10^{k-1} \leq 6S \leq 54k$$

Notemos que $10^3 > 54 \times 4$, supongamos que $10^{m-1} > 54m$ para algún $m > 3$, entonces

$$10^m = 10^{m-1} \times 10 > 540m > 54(m+1).$$

Luego por el principio de inducción matemática $10^{m-1} > 54m$ para todo $m \geq 4$.Con esto hemos probado que $k \leq 3$, es decir nuestro número n tiene a lo más tres dígitos y desde aquí sólo repetir lo hecho en el ejemplo anterior.$\square$

Veamos ahora un problema un poco más difícil de una olimpiada rusa.

Veamos ahora un problema un poco más difícil de una olimpiada rusa.

Ejemplo

Hallar todos los números naturales n tales que la suma de dígitos de 5^n es igual a 2^n.

Uso de Desigualdades

Solución:

Uso de Desigualdades

Solución:
En primer lugar notemos que $5^n < 10^n$, es decir 5^n tiene a lo más n dígitos y por lo tanto su suma de dígitos es a lo más $9n$. Luego los números n que buscamos deben cumplir que

$$2^n \leq 9n.$$

Solución:

En primer lugar notemos que $5^n < 10^n$, es decir 5^n tiene a lo más n dígitos y por lo tanto su suma de dígitos es a lo más $9n$. Luego los números n que buscamos deben cumplir que

$$2^n \leq 9n.$$

Ahora vamos a tabular los primeros valores de n, 2^n y $9n$:

n	2^n	$9n$
1	2	9
2	4	18
3	8	27
4	16	36
5	32	45
6	64	54
7	128	63
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Uso de Desigualdades

Observemos que a partir de $n = 6$ se cumple que $2^n > 9n$, la prueba de esto se realiza por inducción. Como para $n = 6$ esto es cierto y además

$$2^n > 9n \Longrightarrow 2^{n+1} > 18n \Longrightarrow 2^{n+1} > 9(n+1),$$

tenemos que $2^n > 9n$ para todo $n \geq 6$. Los únicos valores de n que podrían son

n	5^n	$S(5^n)$	2^n
1	5	5	2
2	25	7	4
3	125	8	8
4	625	13	16
5	3125	11	32

Por lo tanto $S(5^n) = 2^n$ solamente para $n = 3$.

Uso de Desigualdades

Veamos ahora otro resultado también útil

Veamos ahora otro resultado también útil

Proposición

Si $S(n)$ representa la suma de dígitos de n entonces se cumplen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} S(a+b) &\leq S(a)+S(b) \\ S(ab) &\leq S(a)S(b) \end{aligned}$$

Demostración:
Consideremos las representaciones polinómicas de a y b

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots \\ b &= b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \cdots \ , \end{aligned}$$

donde para cada i se cumple $a_i, b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Luego

$$a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)10 + \cdots + (a_i + b_i)10^i + \cdots$$

Si ocurriese que $a_i + b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ para cada i entonces

$$S(a + b) = S(a) + S(b)$$

Si esto no ocurriese tendríamos que corregir el numeral comenzando por los dígitos de menor orden, cada vez que necesitemos realizar esta operación restamos 10 a cada dígito y sumamos 1 al dígito de orden inmediato superior, luego cada vez que realicemos esta operación estamos restando 9 a $S(a)+S(b)$ para al final obtener $S(a+b)$.
Luego hemos probado que $S(a+b)=S(a)+S(b)-9k$, donde k es la cantidad de correciones necesarias al realizar la suma de manera vertical, en particular tenemos

$$S(a+b) \leq S(a)+S(b).$$

Uso de Desigualdades

En el caso del producto ocurre algo similar:

$$ab = (a_0 + a_1 10 + \cdots)(b_0 + b_1 10 + \cdots)$$

Uso de Desigualdades

En el caso del producto ocurre algo similar:

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_1 10 + \cdots)(b_0 + b_1 10 + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)10 + \cdots + \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)10^k + \cdots \end{aligned}$$

Uso de Desigualdades

En el caso del producto ocurre algo similar:

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_1 10 + \cdots)(b_0 + b_1 10 + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)10 + \cdots + (\sum_{i+j=k} a_i b_j)10^k + \cdots \\ &= \sum_{k \geq 0} c_k 10^k. \end{aligned}$$

Uso de Desigualdades

En el caso del producto ocurre algo similar:

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_1 10 + \cdots)(b_0 + b_1 10 + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)10 + \cdots + (\sum_{i+j=k} a_i b_j)10^k + \cdots \\ &= \sum_{k \geq 0} c_k 10^k. \end{aligned}$$

Podría ocurrir que $c_k \leq 9$ para todo k, en este caso los números c_k serían iguales a los dígitos de ab, si esto no ocurriese tendríamos que corregir el númeral en cuya caso $S(ab)$ sería menor que la suma de los c_k. En ambos casos se cumple que:

$$S(ab) \leq \sum_{k \geq 0} c_k = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) = (\sum_{i \geq 0} a_i)(\sum_{j \geq 0} b_j) = S(a)S(b).$$

Una aplicación de la proposición anterior, puede ser el siguiente problema:

Una aplicación de la proposición anterior, puede ser el siguiente problema:

Ejemplo

Para cada entero positivo n, sea $S(n)$ la suma de dígitos de n. Probar que para todo n se cumple

$$S(2n) \leq 2S(n) \leq 10S(2n)$$

(Irlanda 1996)

Uso de Desigualdades

Solución
Usando la primera parte de la proposición con $a = b = n$ obtenemos:

$$S(2n) = S(n + n) \leq S(n) + S(n) = 2S(n)$$

Solución

Usando la primera parte de la proposición con $a = b = n$ obtenemos:

$$S(2n) = S(n+n) \leq S(n) + S(n) = 2S(n)$$

Ahora usando la segunda parte de la proposición con $a = 2n$ y $b = 5$ nos queda:

$$S(n) = S(10n) \leq S(2n)S(5) = 5S(2n)$$

Solución
Usando la primera parte de la proposición con $a = b = n$ obtenemos:

$$S(2n) = S(n + n) \leq S(n) + S(n) = 2S(n)$$

Ahora usando la segunda parte de la proposición con $a = 2n$ y $b = 5$ nos queda:

$$S(n) = S(10n) \leq S(2n)S(5) = 5S(2n)$$

Multiplicando por 2 a cada lado obtenemos el resultado pedido.