



Sociedad Matemática Peruana

XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

Cuarta Fase - Nivel 1

9 de noviembre de 2014

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

1. Se tienen algunas piedras distribuidas en cinco cajas. Un *movimiento* consiste en elegir una caja que contiene dos o más piedras, retirar dos piedras de esa caja y colocarlas en otras dos cajas (una en cada caja). Determine en cada caso si es posible que todas las cajas tengan la misma cantidad de piedras después de algunos movimientos si inicialmente las cajas contienen:

- a) 4, 3, 3, 2 y 2 piedras respectivamente.
- b) 4, 3, 3, 3 y 2 piedras respectivamente.

2. Determine el menor entero $k > 1$ para el cual existen enteros positivos a , b y c tales que

$$\text{mcd}(a, b + 1) = 5,$$

$$\text{mcd}(b, c + 1) = 6,$$

$$\text{mcd}(c, a + 1) = k.$$

Para dicho valor de k , encuentre una terna (a, b, c) de enteros positivos para la cual ocurran las tres igualdades anteriores.

Aclaración: $\text{mcd}(m, n)$ denota al máximo común divisor de m y n .



Cuarta Fase - Nivel 1

3. Decimos que un entero positivo N es *olímpico* si todos sus dígitos son distintos y además, la suma de los dígitos de N es divisible por cada uno de los dígitos de N .
- a) Halle todos los números olímpicos de tres dígitos.
 - b) Halle el mayor número olímpico y justifique por qué es el mayor.
4. El juego del Sudoku-4 consiste en lo siguiente: Al inicio algunas casillas de un tablero de 4×4 tienen escrito un número del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ (está permitido escribir números repetidos), se gana el juego si se logra escribir un número del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ en cada casilla vacía del tablero de tal forma que en cada fila y en cada columna los números sean diferentes. Decimos que la distribución inicial de números es *perfecta* si solo hay una forma de escribir los números en las casillas vacías para ganar el juego.
- a) ¿Existe una distribución inicial perfecta con 5 números escritos?
 - b) ¿Existe una distribución inicial perfecta con 4 números escritos?
 - c) ¿Existe una distribución inicial perfecta con 3 números escritos?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN