



## XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

### Cuarta Fase - Nivel 2

9 de noviembre de 2014

---

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
  - En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
  - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
  - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
  - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
  - Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.
- 

1. Sean  $a, b, m, n$  enteros positivos tales que:

$$\begin{aligned}m + n &= a + b \\ mn + 1 &= ab.\end{aligned}$$

- a) Pruebe que  $m \neq n$ .
- b) Pruebe que  $a = b$ .

2. Determine todos los números reales  $c$  para los cuales existen números reales no nulos  $x, y, z$  tales que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = c.$$

3. Se tiene un tablero de  $5 \times 5$ . Inicialmente hay un número 1 en cada casilla del tablero. Un *movimiento* consiste en elegir un subtablero de  $2 \times 2$ , borrar los números de las casillas que ocupa y escribir en su lugar los números 1, 2, 3 y 4 en algún orden. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar la suma de los 25 números del tablero después de un número finito de movimientos?



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

## Cuarta Fase - Nivel 2

---

4. Dado un cuadrilátero  $ABCD$  tal que  $AB = AD$ ,  $\angle CBD + \angle ABC = \angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$  y  $\angle BAD > 60^\circ$ . Sea  $M$  cualquier punto del segmento  $AB$  ( $M \neq A$  y  $M \neq B$ ).
- Pruebe que existe un punto  $N$  en el segmento  $CD$  tal que  $BM = DN$  y un punto  $X$  en el segmento  $BC$  tal que  $MX = XN$ .
  - Pruebe que la medida del ángulo  $\angle XAN$  es siempre la misma sin importar cuál sea el punto  $M$ .

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**