Sociedad Matemática Peruana

XI Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2014)

Cuarta Fase - Nivel 3

9 de noviembre de 2014

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

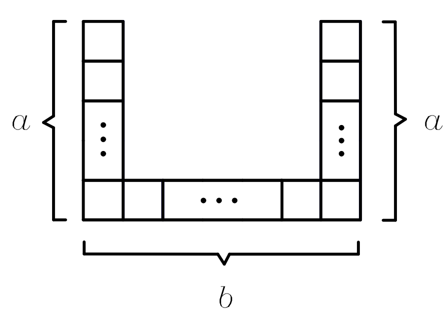
- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

---

1. Encontrar todas las ternas (α, β, θ) de ángulos agudos tales que las siguientes desigualdades se cumplan a la vez

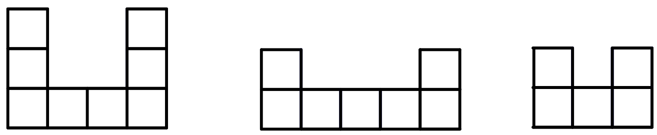
$$(\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta + 1)^2 \geq 2(\operatorname{sen}\alpha + 1)(\cos\beta + 1),$$
$$(\operatorname{sen}\beta + \cos\theta + 1)^2 \geq 2(\operatorname{sen}\beta + 1)(\cos\theta + 1),$$
$$(\operatorname{sen}\theta + \cos\alpha + 1)^2 \geq 2(\operatorname{sen}\theta + 1)(\cos\alpha + 1).$$

2. Una ficha U está formada por cuadraditos de 1×1 y tiene la siguiente forma:



donde hay dos hileras verticales de a cuadraditos, una horizontal de b cuadraditos y además $a \geq 2$ y $b \geq 3$. Observe que hay diferentes tipos de ficha U.

Por ejemplo, algunos tipos de fichas U son los siguientes:



Demuestre que para cada entero $n \geq 6$, el tablero de $n \times n$ se puede cubrir completamente con fichas U, sin que haya huecos y sin que haya dos fichas que se superpongan.

Aclaraciones: La fichas U se pueden rotar. En el cubrimiento se puede usar cualquier cantidad de fichas de cada tipo.

3. *a*) Sean a, b, c enteros positivos tales que $ab + b + 1$, $bc + c + 1$ y $ca + a + 1$ son divisores del número $abc - 1$, demuestre que $a = b = c$.

b) Encuentre todas las ternas (a, b, c) de enteros positivos tales que el producto

$$(ab - b + 1)(bc - c + 1)(ca - a + 1)$$

es un divisor del número $(abc + 1)^2$.

4. Sea ABC un triángulo acutángulo de circuncentro O, sobre los lados BC, CA y AB se toman los puntos D, E y F, respectivamente, de tal manera que $BDEF$ es un paralelogramo. Suponiendo que

$$DF^2 = AE \cdot EC < \frac{AC^2}{4},$$

demuestre que las circunferencias circunscritas a los triángulos FBD y AOC son tangentes entre sí.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN