



Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2015)

Primera Fase - Nivel 3

19 de junio de 2015

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- **Importante: Se informa a todos los alumnos y personal encargado que está prohibido divulgar esta prueba, especialmente por internet, hasta el día 28 de junio. A partir del 29 de junio las pruebas estarán publicadas en la página web del Ministerio de Educación.**

MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. Andrea, Berta, Claudia y Diana tienen cuadernos en sus mochilas. Una de ellas tiene un cuaderno, otra tiene dos, otra tiene tres y la última tiene cuatro cuadernos en su mochila. Andrea, Diana y Berta tienen 7 cuadernos en total. Claudia y Diana tienen 5 cuadernos en total. Si Berta tiene más cuadernos que Andrea, ¿cuántos cuadernos tienen Claudia y Berta en total?
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7
2. Los números $a, b, c, d, 2b$ son los primeros cinco términos de una progresión aritmética. Si $a \neq 0$, calcule el valor de $\frac{a+b}{c+d}$.
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{7}{9}$
3. En un triángulo rectángulo ABC , recto en C , denotamos $\alpha = \angle BAC$ y $\beta = \angle CBA$. Si $\sin \alpha = \cos 23^\circ$, calcule el valor de $\frac{\tan(\alpha - 7^\circ)}{\tan(\beta + 7^\circ)}$.
A) 2 B) 1 C) 3 D) $\sqrt{3}$ E) 6
4. Los números de dos dígitos \overline{ab} y \overline{ba} cumplen que $\overline{ab} - 2$ es múltiplo de 7 y $\overline{ba} - 1$ es múltiplo de 9, determine el valor de $a + b$.
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14



Primera Fase - Nivel 3

5. La *mediana* de una cantidad impar de números se determina de la siguiente forma: se ordena los números de menor a mayor, y la mediana se define como el número que aparece en la posición central. Por ejemplo, la mediana de los números 2, 5, 2, 1, 4 es 2 porque al ordenar dichos números de menor a mayor obtenemos 1, 2, 2, 4, 5 y el 2 es el que está en la posición central.

Determine cuántos valores diferentes puede tomar la mediana de los nueve números:

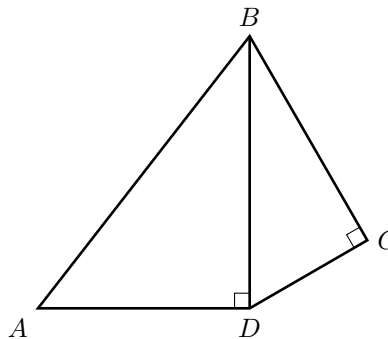
$$1, 11, 12, 5, 8, 13, 5, 5, n,$$

donde n es un entero positivo.

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
6. Carlos tiene dos cubos tales que la arista de uno de ellos es mayor que la arista del otro en 2 cm. Al calcular sus superficies totales, se dio cuenta que la diferencia de éstas es 96 cm^2 . Determine la diferencia de los volúmenes de los cubos de Carlos.
- A) 26 cm^3 B) 56 cm^3 C) 98 cm^3 D) 152 cm^3 E) 218 cm^3
7. Determine cuántos enteros positivos n cumplen la siguiente desigualdad:

$$\frac{n}{20} + \frac{20}{n} < 3 + \frac{1}{3}.$$

- A) 59 B) 53 C) 56 D) 42 E) 49
8. En el cuadrilátero $ABCD$ se cumple que $\angle ADB = \angle DCB = 90^\circ$, $BD = 9$, $DC = 3$ y $AD = 5\sqrt{2}$. Calcule la longitud de la diagonal AC .



- A) $4\sqrt{7}$ B) $7\sqrt{2}$ C) 8 D) $3\sqrt{11}$ E) 9
9. Hay 100 personas haciendo una fila para entrar a un concierto. En cualquier grupo de 7 personas consecutivas hay siempre 5 mujeres. Si en total hay 30 hombres en la fila, ¿cuántas mujeres hay entre las 10 personas del medio?
- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9



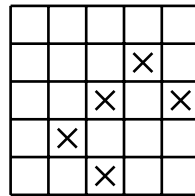
Primera Fase - Nivel 3

10. A, B, C son vértices (no necesariamente consecutivos) de un polígono regular de n lados tales que $\angle ABC = \frac{80^\circ}{7}$. Determine el valor de n sabiendo que $200 < n < 300$.

Aclaración: Un polígono regular es un polígono que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos interiores de igual medida.

- A) 240 B) 250 C) 252 D) 266 E) 280

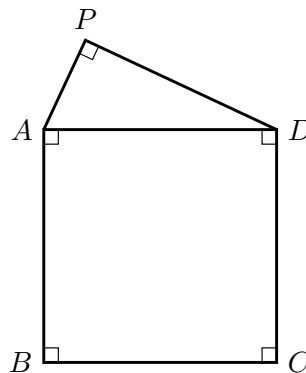
11. El juego de Batalla Naval se juega sobre un tablero de 5×5 , los barcos se representan por rectángulos y cada rectángulo está formado por cuadraditos del tablero. Ana y Beto juegan a Batalla Naval. Beto colocó sus 4 barcos que son rectángulos de 1×2 , 1×3 , 1×4 y 1×5 sobre el tablero de 5×5 (los barcos pueden estar en vertical u horizontal pero no pueden tener casillas en común). Ana no puede ver el tablero, ella solo puede indicar en qué casillas se van a realizar disparos. Luego de hacer los siguientes 5 disparos, Ana no derribó ningún barco de Beto:



¿Cuántos disparos más debe hacer Ana como mínimo para derribar con seguridad todos los barcos de Beto?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

12. Exteriormente al cuadrado $ABCD$ se construye el triángulo rectángulo APD (recto en P), tal que $AP < PD$ y el área del triángulo BPC es al área del cuadrado $ABCD$ como 5 es a 8. Calcule la medida de $\angle ADP$.



- A) 22.5° B) 30° C) 15° D) 24° E) 18°



PERÚ

Ministerio de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Primera Fase - Nivel 3

13. Sea x un ángulo agudo tal que $\cos^2 x \cdot (1 + \operatorname{sen} x \cos x) = 1$. Calcule el valor de

$$\frac{\cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} - \frac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2}.$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

14. El entero positivo N cumple las siguientes dos propiedades:

- El máximo común divisor de N y 280 es 20.
- N tiene exactamente 15 divisores positivos (incluyendo a 1 y N).

Determine la suma de los dígitos de N .

- A) 2 B) 3 C) 7 D) 4 E) 1

15. Una *permutación* es una forma de ordenar los elementos de una secuencia. Por ejemplo, $(2, 1, 6, 5)$ es una permutación de $(1, 2, 5, 6)$.

Sea (a, b, c, d, e) una permutación de $(1, 2, 3, 4, 5)$, ¿cuál es el mayor valor que puede tomar el producto $(a - b)(b - c)(c - d)(d - e)$?

- A) 18 B) 24 C) 36 D) 48 E) 72

16. Decimos que un número de cuatro dígitos distintos \overline{abcd} es *luminoso* si $5a + b = 5c + d$. Por ejemplo 2015 es luminoso ya que todos sus dígitos son distintos y $5 \times 2 + 0 = 5 \times 1 + 5$. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar la suma de los dígitos de un número luminoso?

- A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

17. Se pintan de rojo 10 puntos de una circunferencia. Martín traza una cuerda que une dos puntos rojos y Nicolás traza una cuerda que une dos puntos rojos distintos a los de Martín. ¿Cuál es la probabilidad de que estas dos cuerdas se corten?

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

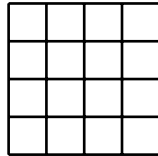
18. En un triángulo rectángulo ABC , recto en B , se ubica un punto interior T y se trazan los segmentos TP , TQ y TR que tienen igual longitud y son perpendiculares a los lados del triángulo (P en AB , Q en BC y R en AC). En cada uno de los cuadriláteros $TQBP$, $TPAR$ y $TRCQ$ se inscribe una circunferencia (tangente a los cuatro lados del cuadrilátero correspondiente) cuyos radios son 6, 9 y x , respectivamente. Halle el valor de x .

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15



Primera Fase - Nivel 3

19. Se tiene un tablero de 4×4 como el mostrado. En cada casilla del tablero se escribe un número entero de tal modo que en cada fila y en cada columna haya al menos dos números iguales. ¿Cuál es la mayor cantidad de números distintos que puede haber en el tablero?



- A) 8 B) 10 C) 9 D) 12 E) 11

20. Sean x, y, z reales positivos tales que

$$x^2y + y^2 = 2z,$$

$$y^2z + z^2 = 3x,$$

$$z^2x + x^2 = 4y.$$

Calcule el valor de xyz .

- A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 3 E) $\frac{3}{4}$

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN