Sociedad Matemática Peruana

XII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2015)

Segunda Fase - Nivel 3

17 de julio de 2015

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados, pero no puedes **publicar o discutir los problemas en internet**, así nos ayudarás a que la olimpiada se realize de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Tres amigos: Roberto, Samuel y Tomás deciden pagar la cuenta de una cena de manera proporcional a su edad. Roberto tiene 24 años y pagó el 32 % de la cuenta. Si Samuel tiene 21 años, ¿cuántos años tiene Tomás?

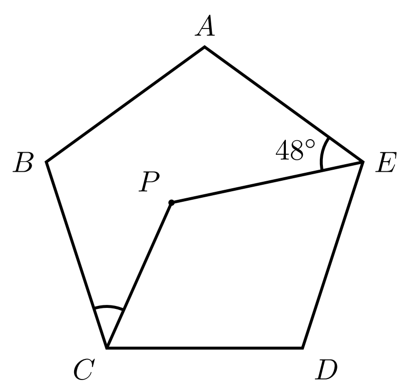
2. Para seleccionar a la delegación peruana en la Olimpiada Internacional se tomaron 6 exámenes, donde el puntaje de cada examen era un número entero entre 0 y 21, inclusive. Para determinar el promedio final de cada alumno se eliminaron sus dos notas más bajas y se promediaron las cuatro notas restantes. Elizabeth dio los 6 exámenes y en los 5 primeros obtuvo 14, 14, 12, 17 y 15, respectivamente. Si el promedio final de Elizabeth fue de 16, ¿cuál fue su puntaje en el último examen?

Segunda Fase - Nivel 3

3. Desde que vive en Arequipa, Martín va al hospital de 3 a 5 veces al año. Según él un año es bueno si va 3 veces, regular si va 4 veces y malo si va 5 veces. Han pasado n años desde que vive en Arequipa y desde entonces ha ido en total 32 veces al hospital. Determina el valor de n si Martín ha tenido al menos dos años buenos, al menos dos años regulares y al menos dos años malos.

4. Fabiola, Gerardo y Héctor tienen 9 tarjetas numeradas del 1 al 9. Las tarjetas son repartidas entre ellos de modo que cada uno recibe 3 tarjetas. Si la suma de los números de las tarjetas de Fabiola es el cuadrado de un número entero y la suma de los números de las tarjetas de Gerardo es el cubo de un número entero, calcule la suma de los números de las tarjetas de Héctor.

5. En la figura mostrada, $ABCDE$ es un pentágono regular y P es un punto tal que $AE = EP$ y $\angle AEP = 48°$. Determine la medida del ángulo $\angle PCB$.



Aclaración: Un pentágono regular es aquel que tiene sus cinco lados iguales y sus cinco ángulos interiores iguales.

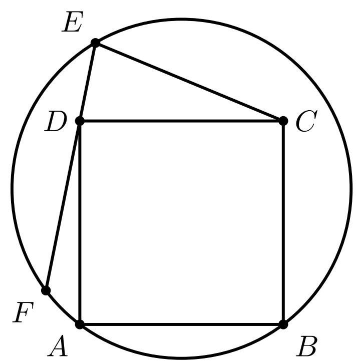
6. En un torneo de fútbol participaron 5 equipos. Cada equipo jugó contra cada uno de los otros equipos exactamente una vez. En cada partido se da 3 puntos al ganador, 0 al perdedor y 1 punto a cada equipo en caso de empate. Se sabe que el que quedó en primer lugar ganó tres partidos y empató uno; y el que quedó en último lugar ganó un partido y perdió tres. Si al final del torneo todos los equipos obtuvieron puntajes distintos, ¿cuál es la suma de los puntajes de los equipos que quedaron en segundo y cuarto lugar?

Segunda Fase - Nivel 3

7. Determine el valor de $x + y + z$, sabiendo que x, y, z son enteros positivos que satisfacen la igualdad

$$2015 + x^2 = 3^y \cdot 4^z.$$

8. Sea AB una cuerda de una circunferencia $\mathcal{S}$ sobre la cual se construye un cuadrado $ABCD$ que está dentro de $\mathcal{S}$. Sea E un punto de $\mathcal{S}$ tal que $CE = CD$. La prolongación del segmento ED corta a $\mathcal{S}$ en el punto F. Se sabe que $DE = 2$ y que la distancia de C a DE es 5. Si x es la longitud del segmento DF, calcule el valor de $12x$.



9. Hay 18 personas sentadas alrededor de una mesa circular. Cuatro personas se van a poner de pie de tal manera que entre cualquier persona puesta de pie y la siguiente puesta de pie (en sentido horario) no haya más de cinco personas sentadas. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

10. Sean x, y, z ángulos agudos tales que

$$4[\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(y+z)\operatorname{sen}(z+x)+1] = (\operatorname{sen}(x+y)+1)(\operatorname{sen}(y+z)+1)(\operatorname{sen}(z+x)+1).$$

Hallar el máximo valor que puede tomar la expresión:

$$100(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z)^2.$$

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN