



Sociedad Matemática Peruana

XII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2015)

Tercera Fase - Nivel 3

15 de setiembre de 2015

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Walter compró entre 50 y 60 unidades de cierto producto y los vendió todos en una feria que duró exactamente una semana. Si se sabe que cada día, a partir del segundo día, vendió una unidad más que el día anterior, ¿cuántas unidades vendió el último día?
2. ¿Cuántos elementos, como máximo, se pueden eliminar del conjunto

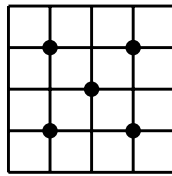
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

para que se cumpla que el producto de los elementos que queden sea múltiplo de cada uno de los números $1, 2, 3, \dots, 14, 15$?

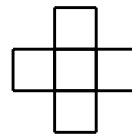


Tercera Fase - Nivel 3

3. Cada casilla de un tablero de 4×4 tiene escrito un número entero de tal modo que: cada cuadrado de 2×2 de la esquina o el centro (es decir, cada cuadrado de 2×2 cuyo centro es uno de los puntos marcados en la figura 1) tiene suma 9 y cada cruz formada por cinco casillas (como en la figura 2) tiene suma 10. Halle la suma de los números escritos en las cuatro esquinas del tablero.



(1)



(2)

4. Halle la suma del mayor y el menor valor que puede tomar el entero positivo n , si el número $2^{10} + 4^n + 1$ es un cuadrado perfecto.

Aclaración: Un cuadrado perfecto es un número de la forma k^2 , donde k es un entero positivo.

5. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 45^\circ$. En el segmento AC se ubica un punto D tal que $\angle ABD + \angle ABC = 180^\circ$. Si $AD = 20\sqrt{2}$ y $DC = 10\sqrt{2}$, determine la longitud de AB .
6. Determine de cuántas formas se pueden ordenar los números del 1 al 9 en una fila de 9 casillas de tal forma que desde el inicio hasta el 9 los números estén ordenados de forma creciente y que desde el 9 hasta el final los números estén ordenados de forma decreciente. Tenga en cuenta que el 9 no puede ir al inicio o al final de la fila.

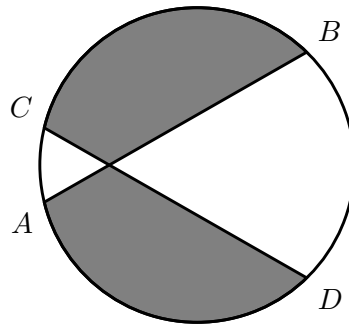


Aclaración: Una forma de ordenar los números es 239876541.

7. Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ una progresión geométrica tal que $a_1 = \sin \alpha$, $a_2 = \tan \alpha$ y $a_3 = \cos \alpha$, donde α es un ángulo agudo. Determine el valor de n para el cual se cumple que $a_n = (\csc \alpha)^5$.

Tercera Fase - Nivel 3

8. Dos cuerdas AB y CD de una circunferencia, como se muestra en la figura, forman un ángulo de 60° , además, la distancia del centro de la circunferencia a cada una de dichas cuerdas es igual a $\sqrt[4]{3}$. Si el área de la superficie sombreada dentro de la circunferencia es 16, halla el área de la superficie no sombreada.



9. Sea $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \rightarrow A$ cumplen que $f(xy) = f(x)f(y)$, para todas las parejas (x, y) de elementos de A que cumplen la condición $x \cdot y \leq 10$?
Aclaración: Algunas parejas (x, y) de elementos de A que cumplen la condición del enunciado son $(1, 1)$ y $(3, 2)$.
10. Se tiene 10 monedas en una fila, donde cada una tiene cara y sello. Al inicio las 10 monedas muestran el sello. Una *operación* consiste en escoger dos monedas adyacentes que muestren lo mismo (ambas caras o ambas sellos) y voltearlas. Determine cuántas configuraciones diferentes se puede obtener, luego de algunas operaciones.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN