



XII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2015)

Cuarta Fase - Nivel 2

18 de octubre de 2015

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
 - En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
 - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
 - Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.
-

1. a) Sean x, y, z números reales, demuestre la desigualdad

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3}.$$

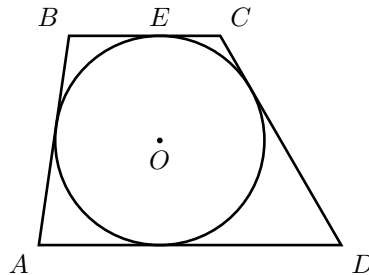
- b) Si a y b son números reales, determine el menor valor posible de la expresión

$$(a + b - 5)^2 + (a - 3)^2 + (b - 4)^2.$$

2. El producto de algunos enteros positivos (no necesariamente distintos) es una potencia de 21. A cada número se le resta 1 y se multiplica todos los números. ¿Es posible que ese nuevo producto sea una potencia de 42 ?

Cuarta Fase - Nivel 2

3. Sea $ABCD$ un trapecio de lados paralelos AD y BC , circunscrito a una circunferencia de centro O , la cual es tangente a BC en el punto E . Pruebe que si $AD = 2BC$, entonces O es el ortocentro del triángulo AED .



Aclaración: El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas.

4. Sobre una mesa hay $n \geq 3$ monedas colocadas en fila. Cada moneda tiene un sello de un lado y cara en el lado opuesto. Una *operación* consiste en voltear una moneda y todas las monedas adyacentes a ella. ¿Para qué valores de n siempre es posible conseguir, luego de algunas operaciones, que todas las monedas muestren el sello, sin importar la configuración inicial de las monedas?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN