Sociedad Matemática Peruana

XII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2015)

Cuarta Fase - Nivel 3

18 de octubre de 2015

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

---

1. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto de n puntos en el plano que tiene la siguiente propiedad: Para cada punto P de $\mathcal{C}$, existen cuatro puntos de $\mathcal{C}$, cada uno distinto de P, que son los vértices de un cuadrado. Halle el menor valor posible de n.

2. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo. La diagonal AC es cortada por BF y BD en los puntos P y Q, respectivamente. La diagonal CE es cortada por DB y DF en los puntos R y S, respectivamente. La diagonal EA es cortada por FD y FB en los puntos T y U, respectivamente. Se sabe que cada uno de los siete triángulos APB, PBQ, QBC, CRD, DRS, DSE y AUF tiene área 1. Halle el área del hexágono $ABCDEF$.

3. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos, con $n \geq 2$, tales que

$$\lfloor\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}\rfloor = \lfloor\sqrt{a_1}\rfloor \cdot \lfloor\sqrt{a_2}\rfloor \cdots \lfloor\sqrt{a_n}\rfloor .$$

Pruebe que al menos $n-1$ de dichos números son cuadrados perfectos.

Aclaración: Dado un número real x, $\lfloor x\rfloor$ denota al mayor número entero que es menor o igual que x. Por ejemplo, $\lfloor\sqrt{5}\rfloor = 2$ y $\lfloor 3\rfloor = 3$.

Cuarta Fase - Nivel 3

4. Sea b un entero positivo **impar**. Se define la sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ de la siguiente manera: a_1 y a_2 son enteros positivos y para todo $k \geq 2$,

$$a_{k+1} = \begin{cases} \dfrac{a_k + a_{k-1}}{2} & \text{si } a_k + a_{k-1} \text{ es par,} \\[2ex] \dfrac{a_k + a_{k-1} + b}{2} & \text{si } a_k + a_{k-1} \text{ es impar.} \end{cases}$$

a) Pruebe que si $b = 1$, entonces a partir de cierto término la sucesión se hará constante.

b) Para cada $b \geq 3$ (impar), pruebe que existen valores de a_1 y a_2 para los cuales la sucesión nunca se hará constante a partir de cierto término.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN