Exámenes Selectivos para la IMO

Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana

Edición: Jorge Tipe

Versión: noviembre 2015

Prólogo

La Olimpiada Internacional de Matemática (IMO, por sus siglas en inglés) es la olimpiada matemática más importante, y participan actualmente alrededor de 100 países. El Perú participa desde el año 1987, con algunas interrupciones en los años 90, pero de forma continua desde el año 1997. Hasta la fecha, año 2015, el Perú ha obtenido 5 medallas de oro, 23 de plata y 38 de bronce. La mejor ubicación de nuestro pais ha sido el lugar 16 (entre más de 100 países), esta ubicación se consiguió en los años 2012 y 2015.

En el Perú, la Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana está a cargo de la selección de los alumnos, y con este fin se toman exámenes selectivos varios meses antes de la realización de la olimpiada. Desde el año 2014 se adoptó el sistema de un examen preselectivo más cuatro exámenes selectivos adicionales.

Aquí podrán encontrar todos los problemas usados en el periodo 2008-2015; si encuentran un error, tienen una sugerencia para aclarar la redacción de un problema, o si tienen cualquier otra consulta con respecto a este archivo, me pueden escribir a `jorgetipe@gmail.com` por lo cual estaré muy agradecido. Iré actualizando este archivo con el paso del tiempo. Por ejemplo, si consigo exámenes de años anteriores.

Jorge Tipe Villanueva

Comisión de Olimpiadas
de la Sociedad Matemática Peruana

Selectivo IMO 2015

Pre-selectivo

1. Halle todos los enteros positivos n para los cuales existen números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen las siguientes condiciones (a la vez):

(i) $-1 < x_i < 1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

(ii) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

(iii) $\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} + \cdots + \sqrt{1 - x_n^2} = 1$.

2. Ana escogió algunas casillas de un tablero de 50×50 y colocó una ficha en cada una de ellas. Pruebe que Beto siempre puede escoger a lo más 99 casillas vacías y colocar una ficha en cada una de ellas de tal forma que cada fila y cada columna del tablero contenga un número par de fichas.

3. Sean M el punto medio del arco BAC de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC, I el incentro del triángulo ABC y L un punto del lado BC tal que AL es bisectriz. La recta MI vuelve a cortar a la circunferencia circunscrita en el punto K. La circunferencia circunscrita del triángulo AKL vuelve a cortar a la recta BC en P. Pruebe que $\angle AIP = 90°$.

4. Sea $n \geq 2$ un entero. La permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de los números $1, 2, \ldots, n$ es llamada *cuadrática* si $a_i a_{i+1} + 1$ es un cuadrado perfecto para todo $1 \leq i \leq n-1$. La permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de los números $1, 2, \ldots, n$ es llamada *cúbica* si $a_i a_{i+1} + 1$ es un cubo perfecto para todo $1 \leq i \leq n - 1$.

$a)$ Pruebe que para infinitos valores de n existe al menos una permutación cuadrática de los números $1, 2, \ldots, n$.

$b)$ Pruebe que para ningún valor de n existe una permutación cúbica de los números $1, 2, \ldots, n$.

Día 1

5. Tenemos 2^m hojas de papel, con el número 1 escrito en cada una de ellas. Realizamos la siguiente operación. En cada paso escogemos dos hojas de papel, si los números en las dos hojas son a y b, borramos esos dos números y escribimos el número $a+b$ en ambas hojas. Pruebe que después de $m \cdot 2^{m-1}$ pasos, la suma de los números de todas las hojas es al menos 4^m.

6. Sea $n > 1$ un entero. Pruebe que infinitos términos de la sucesión $(a_k)_{k \geq 1}$, definida por

$$a_k = \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor$$

son impares.

Nota: Para un número real x, $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero que es menor o igual que x.

7. Para una secuencia $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números reales, definimos su precio como:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_1 + \cdots + x_i|.$$

Dados n números reales, Ana y Beto quieren ordenarlos en una secuencia que tenga un precio bajo. Ana comprueba todas las posibles formas y encuentra el menor precio A. Por otro lado, Beto escoge x_1 tal que $|x_1|$ sea lo menor posible; entre los números que quedan, él escoge x_2 tal que $|x_1 + x_2|$ sea lo menor posible, y así sucesivamente. Es decir, en el i-ésimo paso él escoge x_i entre los números que quedan tal que minimice el valor de $|x_1 + x_2 + \cdots + x_i|$. En cada paso, si varios números proporcionan el mismo valor, Beto escoge uno al azar. Finalmente Beto obtiene una secuencia con precio B.

Halle la menor constante c tal que para cada entero positivo n, para cada colección de n números reales, y para cada secuencia que Beto podría obtener, los valores resultantes satisfacen la desigualdad $B \leq cA$.

Día 2

8. Sea I el incentro del triángulo ABC. La circunferencia que pasa por I y tiene centro en A intersecta a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en los puntos M y N. Pruebe que la recta MN es tangente a la circunferencia inscrita del triángulo ABC.

9. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto **finito** de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se sabe que:

- Si $f, g \in \mathcal{A}$ entonces $f(g(x)) \in \mathcal{A}$.
- Para todo $f \in \mathcal{A}$ existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $f(f(x) + y) = 2x + g(g(y) - x)$, para todos los reales x, y.

Sea $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función identidad, es decir, $i(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que $i \in \mathcal{A}$.

10. Se tiene una caja que contiene 1024 tarjetas. En cada tarjeta está escrito un conjunto de dígitos decimales de tal forma que todos los conjuntos son diferentes (en particular, una de las tarjetas está vacía). Dos jugadores, de forma alternada, retiran tarjetas de la caja (una tarjeta en cada turno). Después de que la caja está vacía, cada jugador revisa si puede retirar una de sus tarjetas tal que cada uno de los diez dígitos aparezca un número par de veces entre las tarjetas que le quedan a ese jugador. Si un jugador puede hacer esto pero el otro no puede, el que sí puede es el ganador, de otra manera se declara un empate.

Determine todas las primeras jugadas que puede realizar el primer jugador para que él tenga estrategia ganadora.

Día 3

11. Sea $n \geq 2$ un entero y sea A_n el conjunto

$$A_n = \{\, 2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k < n \,\}.$$

Determine el mayor entero positivo que no se puede expresar como la suma de uno o más (no necesariamente distintos) elementos de A_n.

12. Halle el menor número real positivo α que tiene la siguiente propiedad: Si el peso de un número finito de calabazas es 1 tonelada y el peso de cada calabaza no es mayor que α toneladas entonces las calabazas se pueden distribuir en 50 cajas (algunas de las cajas pueden quedar vacías) de tal forma que no haya más de α toneladas de calabazas en cada caja.

13. Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω e incentro I. La recta que pasa por I y es perpendicular a CI intersecta al segmento BC y al arco BC de Ω (que no contiene a A) en los puntos U y V, respectivamente. La recta que pasa por U y es paralela a AI intersecta a AV en X; y la recta que pasa por V y es paralela a AI intersecta a AB en Y. Sean W y Z los puntos medios de AX y BC, respectivamente. Pruebe que si los puntos I, X y Y son colineales, entonces los puntos I, W y Z también son colineales.

Día 4

14. Sea n un entero positivo y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reales positivos tales que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}.$$

Pruebe que para cada entero positivo $k \leq n$, existen k números entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cuya suma es al menos k.

15. Sea ABC un triángulo. Los puntos K, L y M pertenecen a los segmentos BC, CA y AB, respectivamente, tales que las rectas AK, BL y CM son concurrentes. Pruebe que es posible escoger dos de los triángulos ALM, BMK y CKL cuyos inradios tengan suma mayor o igual que el inradio del triángulo ABC.

16. Sea $c \geq 1$ un entero. Definimos la sucesión de enteros positivos (a_n) haciendo $a_1 = c$ y

$$a_{n+1} = a_n^3 - 4c \cdot a_n^2 + 5c^2 \cdot a_n + c$$

para todo $n \geq 1$. Pruebe que para cada entero $n \geq 2$ existe un primo p que divide a a_n pero que no divide a ninguno de los números $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Selectivo IMO 2014

Pre-selectivo

1. Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los reales positivos.

a) Construya una función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$2f(x^2) \geq xf(x) + x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

b) Probar que si $f(x)$ cumple la condición de la parte a) entonces $f(x^3) \geq x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

2. Sea n un entero positivo. Hay un número infinito de tarjetas y cada una tiene escrito un número entero no negativo, de tal forma que para cada entero $\ell \geq 0$ hay exactamente n tarjetas que tienen escrito el número ℓ. Una operación consiste en escoger 100 tarjetas de la colección infinita de cartas y luego desecharlas. Hallar el menor valor posible de n para el cual se puede realizar una serie infinita de operaciones tal que para cada entero positivo k se cumpla que la suma de los números de las 100 tarjetas escogidas en la k-ésima operación sea igual a k.

3. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB > BC$ inscrito en una circunferencia. La mediatriz del lado AC corta al arco AC que contiene a B en Q. Sea M un punto del segmento AB tal que $AM + BC = MB$. Probar que la circunferencia circunscrita al triángulo BMC corta a BQ en su punto medio.

4. Un entero positivo es llamado *solitario* si la suma de las inversas de sus divisores positivos (incluyendo a 1 y a sí mismo) es diferente de la suma de las inversas de los divisores positivos de cualquier otro entero positivo.

a) Demostrar que cualquier número primo es solitario.

b) Probar que hay infinitos enteros positivos que no son solitarios.

Día 1

5. Escogemos n vértices cualesquiera de un polígono regular de $2n$ lados y los coloreamos de rojo. Los otros n vértices son coloreados de azul. Ordenamos las $\binom{n}{2}$ distancias entre dos vértices rojos para formar una secuencia no decreciente, y hacemos lo mismo con las $\binom{n}{2}$ distancias entre dos vértices azules. Pruebe que las dos secuencias son idénticas.

6. Dado un triángulo ABC con $AB > BC$, sean D y E puntos de los lados AB y BC, respectivamente, tales que DE y AC son paralelos. Consideremos la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. Una circunferencia que pasa por los puntos D y E es tangente al arco AC que no contiene a B en el punto P. Sea Q la reflexión del punto P respecto a la mediatriz de AC. Los segmentos BQ y DE se cortan en el punto X. Pruebe que $AX = XC$.

7. Sea n un entero positivo. Mariano divide un rectángulo en n^2 rectángulos menores mediante $n-1$ rectas verticales y $n-1$ rectas horizontales, paralelas a los lados del rectángulo mayor. En cada paso Emilio escoge uno de esos rectángulos menores y Mariano le dice su área. Encuentre el menor entero positivo k para el cual siempre es posible que Emilio realice k pasos (escogidos convenientemente) de tal forma que con la información recibida pueda determinar el área de cada uno de los n^2 rectángulos menores.

Día 2

8. Sean x, y, z números reales tales que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + (x + y + z)^2 = 9, \\ xyz \leq \frac{15}{32}. \end{cases}$$

Determine el mayor valor posible de x.

9. Pruebe que para todo entero positivo n existen enteros a y b, ambos mayores que 1, tales que $a^2 + 1 = 2b^2$ y además $a - b$ es múltiplo de n.

10. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo que no posee dos lados paralelos, tal que $\angle AFB = \angle FDE$, $\angle DFE = \angle BDC$ y $\angle BFC = \angle ADF$. Pruebe que las rectas AB, FC y DE son concurrentes si y sólo si las rectas AF, BE y CD son concurrentes.

Día 3

11. Se tiene un triángulo ABC. Sea P un punto variable en el interior del triángulo ABC tal que las rectas AP y CP cortan a los lados BC y AB en los puntos D y E, respectivamente, de tal forma que el área del triángulo APC sea igual al área del cuadrilátero $BDPE$. Probar que la circunferencia circunscrita al triángulo BDE pasa por un punto fijo distinto de B.

12. Cada punto del plano que tiene ambas coordenadas enteras es pintado de rojo, verde o azul. Halle el menor entero positivo n que tiene la siguiente propiedad: sin importar cómo se pintan los puntos, existe un triángulo de área n que tiene sus tres vértices del mismo color.

13. Sea r un entero positivo y sea N_r el menor entero positivo tal que los números

$$\frac{N_r}{n+r}\binom{2n}{n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

son todos enteros. Probar que $N_r = \frac{r}{2}\binom{2r}{r}$.

Día 4

14. Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos, halle todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n,$$

para todos los enteros positivos m y n.

15. Sea n un entero positivo y considere la secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de enteros positivos. Extienda periódicamente dicha secuencia hasta obtener una sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots$ definiendo $a_{n+i} = a_i$ para todo $i \geq 1$. Si

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_1 + n$$

y

$$a_{a_i} \leq n + i - 1, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

a) Pruebe que $a_i \leq n + i - 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

b) Pruebe que $a_1 + \cdots + a_n \leq n^2$.

16. Sea n un entero positivo y A un subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Una A-partición de n en k partes es una representación de n como la suma $n = a_1 + \cdots + a_k$, donde las partes $a_1, \ldots, a_k$ pertenecen a A y no necesariamente son distintas. *El número de partes diferentes* en una tal partición es el número de elementos distintos en el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Decimos que una A-partición de n en k partes es *óptima* si no existe una A-partición de n en r partes con $r < k$. Pruebe que cualquier A-partición óptima de n contiene como máximo $\sqrt[3]{6n}$ partes diferentes.

Selectivo IMO 2013

Día 1

1. Algunos enteros positivos están escritos en una fila. Una operación consiste en lo siguiente: Alicia escoge dos números adyacentes a y b, tales que $a > b$ y a está a la izquierda de b, y reemplaza la pareja (a, b) por una de las siguientes parejas: $(b+1, a)$ ó $(a-1, a)$. Pruebe que Alicia sólo puede realizar un número finito de operaciones.

2. Sea $a \geq 3$ un número real, y P un polinomio de grado n y coeficientes reales. Pruebe que al menos uno de los siguientes números es mayor o igual que 1:

$$|a^0 - P(0)|,\ |a^1 - P(1)|,\ |a^2 - P(2)|,\ \ldots,\ |a^{n+1} - P(n+1)|.$$

3. Un punto P está en el lado AB de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Sea ω la circunferencia inscrita del triángulo CPD e I el centro de ω. Se sabe que ω es tangente a las circunferencias inscritas de los triángulos APD y BPC en K y L, respectivamente. Sea E el punto de intersección de las rectas AC y BD, y F el punto de intersección de las rectas AK y BL. Pruebe que los puntos E, I, F son colineales.

Día 2

4. Sea A un punto fuera de una circunferencia ω. Por A se trazan dos rectas que cortan a ω, la primera corta a ω en B y C, mientras que la segunda corta a ω en D y E (D está entre A y E). La recta que pasa por D y es paralela a BC intersecta a ω en $F \neq D$, y la recta AF intersecta a ω en $T \neq F$. Sean M el punto de intersección de BC y ET, N el simétrico de A con respecto a M, y K el punto medio de BC. Pruebe que el cuadrilátero $DEKN$ es cíclico.

5. Determine todos los enteros $m \geq 2$ que tienen la siguiente propiedad: Cualquier entero n tal que $\frac{m}{3} \leq n \leq \frac{m}{2}$ es un divisor del número $\binom{n}{m-2n}$.

6. A y B juegan con $N \geq 2012$ monedas y 2012 cajas distribuidas alrededor de una circunferencia. Al inicio A distribuye las monedas en las cajas de tal forma que haya al menos 1 moneda en cada caja. Luego ellos realizan sus jugadas en el orden $B, A, B, A, \ldots$ de acuerdo a las siguientes reglas:

- B en su jugada pasa una moneda de cada caja a una caja adyacente.
- A en su jugada escoge algunas monedas que no estuvieron involucradas en la jugada anterior (realizada por B) y que están en cajas diferentes. Luego A pasa cada moneda escogida a una caja adyacente.

El objetivo de A es asegurar que haya al menos 1 moneda en cada caja después de cualquier jugada suya, sin importar cómo juega B y cuántas jugadas hubo en total. Halle el menor N para el cual A puede lograr su objetivo.

Selectivo IMO 2012

Día 1

1. *a*) Encuentre una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(f(x)) = \frac{x^2 - x}{2} \cdot f(x) + 2 - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

b) De todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen la condición $(*)$, halle los posibles valores de $f(2)$.

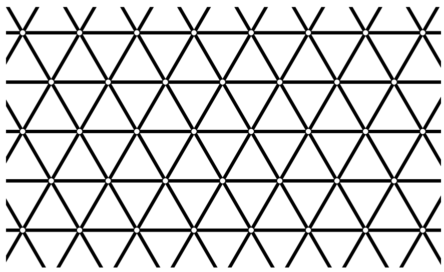
2. Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo, y h_a, h_b, h_c las longitudes de las alturas de dicho triángulo relativas a los lados a, b, c, respectivamente. Si $t \geq \frac{1}{2}$ es un número real, demuestre que existe un triángulo de lados:

$$t \cdot a + h_a, \quad t \cdot b + h_b, \quad t \cdot c + h_c.$$

3. Suponga que 1000 estudiantes están sentados alrededor de una circunferencia. Pruebe que existe un entero k, con $100 \leq k \leq 300$, para el cual existe un grupo de $2k$ estudiantes consecutivos tal que la primera mitad del grupo contiene el mismo número de mujeres que la segunda mitad.

Día 2

4. Se tiene una retícula triangular infinita en la cual la distancia entre dos puntos adyacentes siempre es igual a 1:



Se escogen los puntos A, B y C de la retícula que son los vértices de un triángulo equilátero de lado L, en cuyos lados ya no hay más puntos de la retícula. Demuestra que en el interior del triángulo ABC hay exactamente $\dfrac{L^2-1}{2}$ puntos de la retícula.

5. Sea $ABCD$ un parelogramo tal que $\angle ABC > 90°$ y $\mathcal{L}$ la recta perpendicular a BC que pasa por B. Suponga que el segmento CD no corta a $\mathcal{L}$. De todas las circunferencias que pasan por C y D, hay una que es tangente a $\mathcal{L}$ en P y hay otra que es tangente a $\mathcal{L}$ en Q ($P \neq Q$). Si M es el punto medio de AB, demuestre que $\angle PMD = \angle QMD$.

6. Sea p un número primo impar. Para cada entero a, definimos el número:

$$S_a = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^{p-1}}{p-1}.$$

Sean m y n números enteros tales que:

$$S_3 + S_4 - 3S_2 = \frac{m}{n},$$

demuestre que m es múltiplo de p.

Selectivo IMO 2011

Día 1

1. Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ que satisfacen la siguiente condición: Para cada entero positivo n, existe algún entero positivo k tal que

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(n) = kn,$$

donde $f_1(n) = f(n)$ y $f_{i+1}(n) = f(f_i(n))$, para $i \geq 1$.

2. Sea $A_1A_2 \cdots A_n$ un polígono convexo. El punto P es escogido en el interior del polígono de tal manera que sus proyecciones $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sobre las rectas $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, respectivamente, pertenecen a los lados del polígono (y no a sus prolongaciones). Pruebe que si $X_1, \ldots, X_n$ son puntos arbitrarios que pertenecen a los lados $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$, respectivamente, se cumple la desigualdad:

$$\text{máx}\left\{\frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \ldots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1}\right\} \geq 1.$$

3. Sean a, b números enteros, y sea $P(x) = ax^3 + bx$. Dado un entero positivo n, decimos que el par ordenado (a, b) es n-*bueno* si $n \mid P(m) - P(k)$ implica que $n \mid m - k$ para todos los enteros m, k. Decimos también que el par (a, b) es *muy bueno* si (a, b) es n-bueno para infinitos enteros positivos n.

a) Encuentre un par (a, b) que sea 51-bueno, pero que no sea muy bueno.

b) Demuestre que todos los pares 2010-buenos también son muy buenos.

Día 2

4. Sea ABC un triángulo acutángulo en el que se han trazado las alturas AA_1, BB_1 y CC_1. Sea A_2 un punto del segmento AA_1 tal que $\angle BA_2C = 90°$; se definen análogamente los puntos B_2 y C_2. Sea A_3 el punto de intersección de los segmentos B_2C y BC_2; se definen análogamente los puntos B_3 y C_3. Pruebe que los segmentos A_2A_3, B_2B_3 y C_2C_3 son concurrentes.

5. En cierto planeta, existen 2^N países ($N \geq 4$). Cada país tiene una bandera de N metros de largo y 1 metro de alto, compuesta por N cuadrados de 1 metro de lado, cada cuadrado está pintado de rojo o azul. No hay dos países que tengan la misma bandera.

Decimos que un conjunto de N banderas es *diverso* si estas banderas pueden ser ordenadas en un tablero de $N \times N$ de tal manera que todos los N cuadrados que están sobre la diagonal principal tengan el mismo color. Determine el menor entero positivo M tal que entre cualesquiera M banderas distintas, existen N banderas que forman un conjunto diverso.

6. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales, con $n \geq 3$, tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ y además

$$2a_k \leq a_{k-1} + a_{k+1} \quad \text{para} \quad k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Determine el menor número $\lambda(n)$, tal que para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumpla que

$$|a_k| \leq \lambda(n) \cdot \text{máx}\{|a_1|, |a_n|\}.$$

Selectivo IMO 2010

Día 1

1. En cualquier triángulo no equilátero PQR, se cumple que su ortocentro, baricentro y circuncentro pertenecen a una misma recta, esa recta recibe el nombre de *recta de Euler* del triángulo PQR.

Sea ABC un triángulo acutángulo y F un punto en el interior del triángulo tal que

$$\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120°.$$

Pruebe que las rectas de Euler de los triángulos AFB, BFC y CFA son concurrentes.

2. Un entero positivo N es llamado *balanceado*, si $N = 1$ o si N puede ser representado como el producto de una cantidad par de números primos, no necesariamente diferentes. Dados los enteros positivos a y b, considere el polinomio P definido por $P(x) = (x + a)(x + b)$.

a) Pruebe que existen dos enteros positivos distintos a y b tales que los números $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ son balanceados.

b) Pruebe que si $P(n)$ es balanceado para todo entero positivo n, entonces $a = b$.

3. Cinco jarras vacías e idénticas de 2 litros de capacidad están ubicadas sobre los vértices de un pentágono regular. Cenicienta y su madrastra malvada realizan el siguiente procedimiento por rondas: Al inicio de cada ronda, la madrastra toma un litro de agua de un río cercano y distribuye su contenido arbitrariamente en las 5 jarras. Luego Cenicienta escoge un par de jarras vecinas, vierte todo su contenido en el río, y las regresa a su lugar. Luego la siguiente ronda empieza. El objetivo de la madrastra es conseguir que una de las jarras rebalse. El objetivo de Cenicienta es prevenir que eso suceda. ¿La madrastra puede asegurar que una de las jarras rebalse?

Día 2

4. Sean x, y, z reales positivos tales que $x + y + z = 1$. Pruebe que

$$\frac{1+xy}{x+y} + \frac{1+yz}{y+z} + \frac{1+zx}{z+x} \geq 5.$$

5. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Para cada subconjunto $\mathcal{X}$ de $\mathbb{N}$ definimos el conjunto $\Delta(\mathcal{X})$ como el conjunto de todos los números $|m-n|$, donde m y n son elementos de $\mathcal{X}$, es decir:

$$\Delta(\mathcal{X}) = \{|m-n|\,;\ m, n \in \mathcal{X}\}.$$

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos conjuntos infinitos y disjuntos cuya unión es $\mathbb{N}$.

a) Pruebe que el conjunto $\Delta(\mathcal{A}) \cap \Delta(\mathcal{B})$ tiene infinitos elementos.

b) Pruebe que existe un subconjunto infinito $\mathcal{C}$ de $\mathbb{N}$ tal que $\Delta(\mathcal{C})$ es un subconjunto de $\Delta(\mathcal{A}) \cap \Delta(\mathcal{B})$.

6. Los lados AD y BC de un cuadrilátero $ABCD$ (tal que AB no es paralelo a CD) se intersectan en un punto P. Los puntos O_1 y O_2 son los circuncentros, y los puntos H_1 y H_2 son los ortocentros de los triángulos ABP y DCP, respectivamente. Sean E_1 y E_2 los puntos medios de los segmentos O_1H_1 y O_2H_2, respectivamente. Pruebe que la recta perpendicular a CD que pasa por E_1, la recta perpendicular a AB que pasa por E_2 y la recta H_1H_2 son concurrentes.

Día 3

7. Sean a, b, c reales positivos tales que $a + b + c = 1$. Pruebe que

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + 3(ab + bc + ca) \geq \frac{11}{2}$$

8. Dado un cuadrilátero cíclico $ABCD$, las diagonales AC y BD se intersectan en E y las rectas AD y BC se intersectan en F. Los puntos medios de AB y CD son G y H, respectivamente. Pruebe que EF es tangente en E a la circunferencia que pasa por los puntos E, G y H.

9. Halle todos los enteros positivos n para los cuales existe una secuencia de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que:

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 1}{a_{k-1} + 1} - 1$$

para todo k con $2 \leq k \leq n - 1$.

Selectivo IMO 2009

Día 1

1. Pruebe que existen infinitas ternas (x, y, z) de números reales que satisfacen las ecuaciones:

$$x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$$

tales que x, y, z son distintos dos a dos.

2. En el congreso se forman 3 comisiones disjuntas de 100 congresistas cada una. Cada pareja de congresistas se conocen o no se conocen entre sí. Demuestra que existen dos congresistas, de comisiones distintas, tales que la tercera comisión contiene 17 congresistas que conocen a ambos, o 17 congresistas que no conocen a ninguno de ellos.

3. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo que no tiene ningún par de lados paralelos. Se sabe que, para todo punto P interior al hexágono, el valor de:

$$\text{Área}[ABP] + \text{Área}[CDP] + \text{Área}[EFP]$$

es constante. Pruebe que los triángulos ACE y BDF tienen el mismo baricentro.

Día 2

4. Demuestre que existen 2009 números naturales consecutivos, tales que cada uno de ellos cumpla que el cociente de su mayor divisor primo entre su menor divisor primo es un número racional mayor que 20.

5. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia inscrita al triángulo ABC, la cual es tangente a los lados BC, AC, AB en los puntos A', B', C', respectivamente. En $\mathcal{C}$ se toman los puntos distintos K y L tales que:

$$\angle AKB' + \angle BKA' = \angle ALB' + \angle BLA' = 180°.$$

Pruebe que los puntos A', B', C' están a igual distancia de la recta KL.

6. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Determine si existe o no un par de funciones (f, g), ambas definidas de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, que satisfagan las siguientes condiciones a la vez:

(i) Ambas funciones son estrictamente crecientes, es decir, para todo $x, y \in \mathbb{N}$ con $x < y$, se cumple que $f(x) < f(y)$ y $g(x) < g(y)$.

(ii) Para todo $x \in \mathbb{N}$ se cumple que $f(g(g(x))) < g(f(x))$.

Selectivo IMO 2008

Día 1

1. En el triángulo ABC, sea I el centro de la circunferencia inscrita y sea I_A el centro de la circunferencia ex-inscrita opuesta al vértice A. Sea L_A la recta que pasa por los ortocentros de los triángulos BIC y BI_AC. Se definen de forma análoga las rectas L_B y L_C. Pruebe que las rectas L_A, L_B, L_C pasan por un mismo punto.

2. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación:

$$f(2f(x) + y) = f(f(x) - f(y)) + 2y + x,$$

para cualesquiera números reales x, y.

3. Dado cualquier número natural n, consideremos la secuencia (a_i), $1 \leq i \leq 2n$, definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= -k, & 1 \leq k \leq n \\ a_{2k} &= n - k + 1, & 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Decimos que el par (b, c) es *bueno* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

i) $1 \leq b < c \leq 2n$,

ii) $\displaystyle\sum_{j=b}^{c} a_j = 0$

Si $B(n)$ es el número de pares buenos correspondientes a n, demuestre que existen infinitos n para los cuales $B(n) = n$.

Día 2

4. Sean $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ circunferencias no concéntricas tales que $\mathcal{S}_1$ está en el interior de $\mathcal{S}_2$. Sea K un punto variable de $\mathcal{S}_1$. La recta tangente a $\mathcal{S}_1$ en el punto K corta a $\mathcal{S}_2$ en los puntos A y B. Sea M el punto medio del arco AB que está en el semiplano determinado por AB que no contiene a $\mathcal{S}_1$. Encontrar el lugar geométrico del punto simétrico de M respecto a K.

5. Cuando cortamos una cuerda en dos partes, decimos que el corte es *especial* si las dos partes obtenidas tienen longitudes distintas. Cortamos una cuerda, de 2008 de longitud, en dos partes de longitudes enteras y escribimos estos dos enteros en la pizarra. Luego cortamos una de las partes en dos partes de longitudes enteras y escribimos estos dos enteros en la pizarra. El proceso termina cuando todas las partes tienen 1 de longitud.

a) Halle el mínimo número posible de cortes especiales.

b) Pruebe que, para todos los procesos que tienen el mínimo número posible de cortes especiales, la cantidad de enteros distintos en la pizarra es siempre la misma.

6. Para cada entero positivo n, sea $d(n)$ el número de divisores positivos de n. Decimos que un entero positivo es *feliz* si se puede expresar en la forma $\dfrac{a^2b}{a-b}$, donde $a > b > 0$ son enteros. Además, decimos que un entero positivo m es *malvado* si no existe un entero feliz n tal que $d(n) = m$. Demuestre que todo entero feliz y malvado es una potencia de 4.