Exámenes Selectivos para la Olimpiada Matemática del Cono Sur

Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana

Edición: Jorge Tipe

Versión: noviembre 2014

Prólogo

En la Olimpiada Matemática de Países del Cono Sur, o simplemente Olimpiada del Cono Sur, participan los siguientes países con una delegación de 4 alumnos: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Ecuador, Paraguay, Perú y Uruguay. Pueden participar alumnos que no hayan cumplido 16 años al año anterior de la realización de la Olimpiada.

En el Perú, la Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana está a cargo de la selección de los alumnos, y con este fin se toman exámenes selectivos algunos meses antes de la realización de la olimpiada. En los últimos años se han tomado tres exámenes selectivos, en días diferentes.

Los problemas tienen diversos orígenes, pero en los últimos años hemos tratado de incluir problemas originales (propuestos por peruanos) en los exámenes, en la medida de lo posible se ha incluido el nombre del autor de un problema siempre que se conozca esa información.

Si encuentran un error, tienen una sugerencia para aclarar la redacción de un problema, o si tienen cualquier otra consulta con respecto a este archivo, me pueden enviar un correo a `jorgetipe@gmail.com` por lo cual estaré muy agradecido. Iré actualizando este archivo con el paso del tiempo. Por ejemplo, si consigo exámenes de años anteriores.

Jorge Tipe Villanueva

Comisión de Olimpiadas
de la Sociedad Matemática Peruana

Selectivo Cono Sur 2015

Día 1

1. A escribe, a su elección, 8 unos y 8 dos en un tablero de 4×4. Luego B cubre el tablero con 8 dominós y para cada dominó halla el menor de los dos números que cubre ese dominó. Finalmente, A suma estos 8 números y el resultado es su *puntaje*. ¿Cuál es el mayor puntaje que A se puede asegurar, sin importar cómo juegue B?

Aclaración: Un dominó es un rectángulo de 1×2 o de 2×1 que cubre exactamente dos cuadraditos del tablero.

2. Sean a, b, c y d elementos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2014, 2015\}$ tales que $a < b < c < d$, $a + b$ es un divisor de $c + d$ y $a + c$ es un divisor de $b + d$. Determine el mayor valor que puede tomar a.

3. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Se elige un punto X del lado AB y un punto Y del lado CD. Los segmentos AY y DX se cortan en P; y los segmentos BY y CX se cortan en Q. Pruebe que la recta PQ pasa siempre por un punto fijo, sin importar la elección de los puntos X y Y.

4. En una pequeña ciudad hay n rutas de buses, con $n > 1$, y cada ruta tiene exactamente 4 paraderos. Si cualesquiera dos rutas tienen exactamente un paradero en común, y cada pareja de paraderos pertenece a exactamente una ruta, halle todos los posibles valores de n.

Día 2

5. Halle el menor término de la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida por $a_1 = 2014^{2015^{2016}}$ y

$$a_{n+1}= \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{si } a_n \text{ es par,} \\ a_n + 7 & \text{si } a_n \text{ es impar.} \end{cases}$$

6. Sea n un entero positivo. En un tablero de $2n \times 2n$, $2n^2$ casillas se pintaron de blanco y las otras $2n^2$, de negro. Una operación consiste en escoger un subtablero de 2×2 y reflejar sus 4 casillas con respecto al eje de simetría vertical u horizontal de dicho subtablero. ¿Para qué valores de n es posible siempre conseguir la coloración similar al ajedrez, a partir de cualquier coloración inicial?

7. En el plano se ubicaron 6 puntos tales que la distancia entre dos cualesquiera de ellos es mayor o igual que 1. Pruebe que es posible escoger dos de esos puntos tales que su distancia sea mayor o igual que $2\cos 18°$.

Observación: Le podría ser de ayuda saber que $\cos 18° = 0{,}95105\ldots$ y $\cos 24° = 0{,}91354\ldots$.

Día 3

8. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que los rayos AB y DC se intersectan en K. Sean M y N los puntos medios de los segmentos AC y KC, respectivamente. Halle todos los posibles valores de $\angle ADC$ si los puntos M, B, N y D pertenecen a una misma circunferencia.

9. Sean m y n enteros positivos. Un niño recorre el plano cartesiano dando algunos pasos. El niño comienza su recorrido en el punto $(0, n)$ y termina en el punto $(m, 0)$ de tal forma que:

- Cada paso tiene longitud 1 y es paralelo al eje X o al eje Y.
- Para cada punto (x, y) de su recorrido se cumple que $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

Para cada paso del niño se calcula la distancia que hay entre el niño y el eje al cual es paralelo dicho paso. Si el paso hace que el niño esté más lejos del punto $(0, 0)$ que antes, consideramos esa distancia como positiva, caso contrario, consideramos esa distancia como negativa. Pruebe que al finalizar el recorrido del niño, la suma de todas las distancias es 0.

10. Sea n un entero positivo. Se tiene una colección de tarjetas que cumple las siguientes propiedades:

- Cada tarjeta tiene escrito un número de la forma $m!$, donde m es un entero positivo.
- Para todo entero positivo $t \leq n!$, es posible escoger una o más tarjetas de la colección de tal forma que la suma de los números de esas tarjetas sea t.

Determine, en función de n, el menor número de tarjetas que puede tener dicha colección.

Selectivo Cono Sur 2014

Día 1

1. Un par ordenado (a, b) de enteros positivos es llamado *decianimal* cuando $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ es igual a una fracción decimal $\dfrac{m}{10}$, con $\text{mcd}(m, 10) = 1$. Halle todos los pares decianimales.

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Suponga que los rayos BC y AD se intersectan en el punto P y Q es un punto del plano tal que P es punto medio del segmento BQ. Se construyen los paralelogramos $CAQR$ y $DBCS$. Pruebe que los puntos C, Q, R, S pertenecen a una misma circunferencia.

3. Dado un arreglo de n números reales, podemos realizar varias veces la siguiente *operación*: Elegir un número primo $p \leq n$, y p de los n números, para luego reemplazar cada uno de ellos por el promedio aritmético de los p números. El objetivo es que al final todos los n números sean iguales.

a) Si $n = 2014$, probar que bastan 1151 operaciones para conseguir el objetivo, sea cual sea el arreglo inicial.

b) Si $n \leq 2014$, probar que bastan 7744 operaciones para conseguir el objetivo, sea cual sea el arreglo inicial.

4. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n puntos diferentes alrededor de una circunferencia. Se une cada par de puntos por medio de un segmento que es coloreado de rojo o azul. Considere una coloración para la cual P_iP_j es rojo si y sólo si $P_{i+1}P_{j+1}$ es azul, para cualesquiera índices distintos i, j en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ (asumimos que $P_{n+1} = P_1$).

a) ¿Para qué valores de n es posible tal coloración?

b) Si un *paso* consiste en moverse a lo largo de un segmento rojo, desde un extremo al otro, demuestre que es posible ir desde cualquier punto P_i hasta cualquier otro punto P_j en a lo más tres pasos.

Día 2

5. Determine todos los enteros positivos $n \geq 4$ que satisfacen la siguiente propiedad: Si los números reales no nulos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cumplen que para cualesquiera tres subíndices $1 \leq i < j < k \leq n$ existe un subíndice ℓ distinto de i, j, k tal que $a_i \cdot a_j \cdot a_k = a_\ell^3$, entonces $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

6. María puede elegir un número positivo $\ell < 1$ y varios cuadrados de lado ℓ para cubrir un cuadrado de lado 1. ¿Cuál es el menor número de cuadrados que necesita usar María?

7. Una sucesión estrictamente creciente e infinita de enteros positivos es n-*elegante* si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- cualesquiera dos términos de la sucesión son coprimos,
- la suma de los digitos de cada término es n.

Demostrar que hay infinitos enteros positivos n para los cuales es posible encontrar una sucesión n-elegante.

Día 3

8. Sea Γ un círculo y A un punto exterior a Γ. Las rectas tangentes a Γ que pasan por A tocan a Γ en B y C. Sea M el punto medio de AB. El segmento de recta MC corta a Γ nuevamente en D y la recta AD corta a Γ nuevamente en E. Siendo $AB = a$ y $BC = b$, hallar CE en términos de a y b.

9. Hallar el mayor entero positivo n para el cual existe una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de cifras no nulas (es decir, $a_i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$) tal que el número de k cifras $\overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_1a_0}$ divide al número de $k+1$ cifras $\overline{a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0}$ para todo k, $1 \leq k \leq n$.

10. En un torneo de ajedrez cada dos jugadores han jugado exactamente un partido. La victoria vale 1 punto, la derrota 0, y en caso de empate cada jugador obtiene $1/2$ punto. Un partido es llamado *anómalo* si el ganador de ese partido, al finalizar el torneo, obtuvo menos puntaje que el perdedor de ese partido.

a) ¿Es posible que más del 75 % del total de partidos sean anómalos?

b) ¿Es posible que más del 70 % del total de partidos sean anómalos?

Selectivo Cono Sur 2013

Día 1

1. Dos piedras, una blanca y una negra, están ubicadas en dos casillas de un tablero de ajedrez (de 8×8). En cada *movida* una de las piedras se mueve a una casilla vecina, de tal forma que en ningún momento las dos piedras están en la misma casilla. Determine si es posible o no que, después de una secuencia de movidas, cada forma de ubicar a las piedras sobre el tablero haya aparecido exactamente una vez.

Aclaración: Dos casillas son vecinas si comparten un lado.

2. Dado un triángulo ABC, sean M, N y P puntos de los lados AB, BC y CA, respectivamente, tales que $MBNP$ es un paralelogramo. La recta MN corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en los puntos R y S. Pruebe que la circunferencia circunscrita del triángulo RPS es tangente a AC.

3. Pruebe que, para cada entero impar $n > 1$, existen tres enteros positivos a, b, c, coprimos entre sí (dos a dos), tales que

$$a^2 + 2b^2 + 4c^2 = 3^n.$$

(John Cuya)

Día 2

4. Sean n, a, b enteros positivos, con $a > b$, tales que $n^2 + 1 = ab$.

a) Pruebe que

$$a - b \geq \sqrt{4n - 3}. \qquad (*)$$

b) Halle todos los enteros positivos n para los cuales puede ocurrir la igualdad en $(*)$.

5. Sea I el incentro del triángulo ABC y sean A_1, B_1 y C_1 puntos que pertenecen a los segmentos AI, BI y CI, respectivamente. Las mediatrices de los segmentos AA_1, BB_1 y CC_1 determinan un triángulo $\mathcal{T}$. Si I es el ortocentro del triángulo $A_1B_1C_1$, demuestre que los circuncentros de los triángulos $\mathcal{T}$ y ABC coinciden.

6. Un club de caminata con $4n$ miembros organiza una serie de caminatas a lo largo de cierto número de fines de semana, de acuerdo a las siguientes reglas:

a) Cada fin de semana hay dos caminatas: una en el día sábado y la otra en el día domingo.

b) Exactamente $2n$ miembros del club participan en cada caminata.

c) En cada fin de semana ningún miembro participa en las dos caminatas.

d) Después de que todas las caminatas hayan concluido, cualesquiera dos miembros del club han participado juntos en r caminatas (r es un número fijo).

Pruebe que después de que todas las caminatas hayan concluido, cualesquiera tres miembros del club han participado juntos en t caminatas, donde t es un número fijo que es múltiplo de $n - 1$.

Día 3

7. Determine el mayor número real c que tiene la siguiente propiedad: En cualquier heptágono convexo la suma de las longitudes de todas sus diagonales es mayor que cP, donde P es el perímetro del heptágono.

8. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito, formado por enteros positivos. Decimos que $\mathcal{A}$ es *bueno* si cumple las siguientes dos propiedades:

- Para cualesquiera tres elementos distintos a, b, c de $\mathcal{A}$, se cumple que su máximo común divisor es 1.
- Para cualesquiera dos elementos distintos b y c de $\mathcal{A}$, existe un elemento a de $\mathcal{A}$ tal que $a \neq b$, $a \neq c$ y $a \mid bc$.

Determine todos los conjuntos buenos.

9. La secuencia $n_1, n_2, \ldots, n_{2013}$ de enteros positivos cumple que $n_i n_{i+1} \neq n_j n_{j+1}$ para cualesquiera índices diferentes i y j, menores que 2013. Determine la menor cantidad de números diferentes que puede tener dicha secuencia.

Selectivo Cono Sur 2012

Día 1

1. Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles y M el punto medio de la hipotenusa AC. Dentro del triángulo se traza una circunferencia que es tangente a AB en P y a BC en Q. La recta MQ corta nuevamente a la circunferencia en el punto T. Si H es el ortocentro del triángulo AMT, demuestre que $MH = BQ$.

(Jorge Tipe)

2. En un tablero de 7×7 cada casilla se pinta de rojo o azul de tal manera que cualquier casilla del tablero tenga al menos dos casillas vecinas azules. Determine la menor cantidad de casillas azules que puede haber en el tablero.

Aclaración: Dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.

3. *a*) Se tiene una lista de n dígitos no nulos (puede haber repetidos) tales que su suma es múltiplo de 27, demuestra que esos dígitos se pueden ordenar de forma adecuada para obtener un número de n dígitos que es múltiplo de 27.

b) Un número formado por n dígitos no nulos tiene la propiedad que al reordenar sus dígitos de cualquier forma se obtiene siempre un múltiplo de 27, demuestra que la suma de los n dígitos de ese número es múltiplo de 27.

Día 2

4. Sea n un entero positivo. Fernando y Julián juegan de la siguiente forma: Fernando escribe en la pizarra una lista de n enteros positivos, luego, Julián borra algunos de ellos (puede ocurrir que no borre ninguno, pero no puede borrar todos los números) y a cada número que queda le coloca un signo ($+$ o $-$). Si la suma de los nuevos números de la pizarra es múltiplo de 2012, gana Julián, de lo contrario, gana Fernando. Determina para cada valor de n quién tiene la estrategia ganadora.

Aclaración: El múltiplo de 2012 no necesariamente es positivo.

5. Una calculadora tiene dos teclas especiales:

- La tecla A transforma un número x en el número $2x$.
- La tecla B transforma un número x en el número $2x - 1$.

¿Es cierto que, si se empieza con cualquier entero positivo, es posible apretar una secuencia de teclas especiales de tal forma que se obtenga al final la quinta potencia de un número entero?

6. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas AP y BQ, y M es el punto medio del lado AB. Si la circunferencia circunscrita al triángulo BMP es tangente al lado AC, demuestre que la circunferencia circunscrita al triángulo AMQ es tangente a la prolongación del lado BC.

Día 3

7. *a*) Demuestre que el número 2012 no se puede expresar como la suma de los cubos de tres números enteros.

b) Sean a y b números enteros tales que $a^2 - 4b$ es el cuadrado de un número entero, demuestre que el número $3ab$ se puede expresar como la suma de los cubos de tres números enteros.

(Jorge Tipe)

8. Se tiene un conjunto $\mathcal{C}$ de n circunferencias en el plano y se considera el conjunto $\mathcal{X}$ de todas las rectas del plano que son tangentes al menos a dos circunferencias de $\mathcal{C}$. Se sabe que existe un polígono regular de 2012 lados tal que cada uno de sus lados está incluido en alguna recta de $\mathcal{X}$, determine el menor valor de n para el cual esta situación es posible.

9. Un tablero de $n \times n$ es llamado *binario* si en cada casilla está escrito uno de los números 0 ó 1. En un tablero binario tenemos las siguientes definiciones:

- Un rectángulo de 2×3 es llamado *ordenado* si al sumar los números de cada una de sus tres columnas se obtiene tres números de la misma paridad.
- Un rectángulo de 3×2 es llamado *ordenado* si al sumar los números de cada una de sus tres filas se obtiene tres números de la misma paridad.

Sea $A(n)$ la cantidad de tableros binarios de $n \times n$ que no contienen ningún rectángulo ordenado. Sea $B(n)$ la cantidad de tableros binarios de $n \times n$ en los que no hay dos casillas con un lado en común que contengan ambas al número 1.

Para cada entero $n \geq 2$, calcule el valor del cociente:

$$\frac{A(n+1)}{B(n)}.$$

(John Cuya)

Selectivo Cono Sur 2011

Día 1

1. Halle todos los enteros positivos n para los cuales se cumple que:

$$\text{m.c.d.}(n, 1) + \text{m.c.d.}(n, 2) + \cdots + \text{m.c.d.}(n, n) = 3n - 3.$$

Aclaración: El número m.c.d.(a, b) denota al máximo común divisor de los enteros positivos a y b.

(Sergio Vera)

2. En un torneo participaron n equipos de fútbol. Cada uno de los n equipos jugó exactamente un partido contra cada uno de los otros equipos. Algunos partidos terminaron en empate. Sucedió que cada equipo ganó exactamente tres partidos y además, no hay tres equipos A, B, C tales que A ganó a B, B ganó a C y C ganó a A. Determine todos los posibles valores de n.

(Jorge Tipe)

3. Considere 15 puntos en el plano, cada uno de ellos es pintado de rojo, azul o verde, de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- La suma de todas las distancias entre los puntos rojos y los azules es 51.
- La suma de todas las distancias entre los puntos rojos y los verdes es 39.
- La suma de todas las distancias entre los puntos azules y los verdes es 1.

Determine cuántos puntos hay de cada color (analice todas las posibilidades).

Día 2

4. Sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC de un triángulo ABC y G su baricentro. Si las circunferencias circunscritas a los triángulos AMN y BGC son tangentes exteriores, ¿es posible que el triángulo ABC sea escaleno?

(Jorge Tipe)

5. Sea $n \geq 3$ un número entero. En cada una de las casillas de un tablero de $n \times n$ se escribe un 0 o un 1 de tal manera que la suma de los números de cada subtablero 2×2 y de cada subtablero 3×3 es un número par, ¿de cuántas formas se puede hacer eso?

(Jonathan Farfán)

6. Determine todos los enteros positivos a para los cuales existen los enteros no negativos m, n, k tales que al escribir la representación decimal de a^n a la izquierda de la representación decimal de a^m (sin dejar espacio) obtenemos la representación decimal de a^k.

Ejemplo: Si escribimos la representación decimal de 6^2 a la izquierda de la representación decimal de 6^3 obtenemos 36216.

Día 3

7. Un entero positivo es llamado *digital* si dicho número es igual al producto de los dígitos de algún entero positivo. Por ejemplo, 28 es digital porque es igual al producto de los dígitos del número 147.

Sean $n_1, n_2, \ldots, n_k$ números digitales diferentes, demuestre que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k} < \frac{35}{8}.$$

(Jorge Tipe)

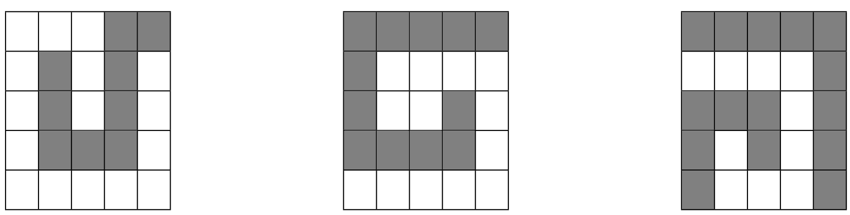
8. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de centro O tal que BC y AD no son paralelos. Sea P el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero. Los rayos AB y DC se intersectan en E. Una circunferencia de centro I inscrita en el triángulo EBC es tangente al lado BC en T_1. La circunferencia ex-inscrita al triángulo EAD, relativa a AD, es tangente a AD en T_2 y tiene centro J. Las rectas IT_1 y JT_2 se intersectan en Q. Pruebe que O, P, Q son colineales.

9. Sea $n \geq 3$ un entero impar. Cada una de las casillas de un tablero de $n \times n$ ha sido coloreada de blanco o gris. Decimos que una secuencia de cuadrados $C_1, C_2, \ldots, C_m$ es un *camino* si se cumplen las siguientes condiciones:

- Los cuadrados $C_1, C_2, \ldots, C_m$ tienen el mismo color.
- Los cuadrados C_i y C_{i+1} comparten un lado para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$.
- No hay otros dos cuadrados en la secuencia que comparten un lado.

Suponga que los cuadrados blancos forman un camino, y que los cuadrados grises también forman un camino, demuestre que uno de esos caminos empieza o termina en el centro del tablero.

Por ejemplo, en el tablero de la izquierda el coloreo es válido, pero en los otros dos no. En el tablero del centro los cuadrados blancos no forman un camino porque no cumplen la tercera condición, y en el de la derecha los cuadrados negros tampoco forman un camino porque no cumplen la segunda condición.



Selectivo Cono Sur 2010

Día 1

1. Un entero positivo n es llamado *representable*, si existen enteros positivos $a > b > c$ tales que $n = a + b + c$, y además a es múltiplo de b y b es múltiplo de c. Demuestre que el conjunto de los enteros positivos que **no** son representables es finito y determine el mayor elemento de ese conjunto.

(Jorge Tipe)

2. Sean a y b reales positivos. Determine, en función de a y b, el menor número real r que tiene la siguiente propiedad: Es posible cubrir un rectángulo de lados a y b, con dos discos circulares de radio r.

(Jorge Tipe)

3. Se tiene un tablero de 8×8 y muchas fichas de 1×2 y 1×3. Pablo debe colocar sobre el tablero solamente fichas de 1×2, sin superponerse, de tal manera que sea imposible colocar una ficha de 1×3 sobre las casillas descubiertas del tablero. ¿Cuál es la menor cantidad de fichas de 1×2 que puede colocar Pablo?

Aclaración: Las fichas de 1×2 y 1×3 pueden estar en posición horizontal o vertical. Cada ficha de 1×2 cubre exactamente dos casillas del tablero, y cada ficha de 1×3 cubre exactamente tres casillas del tablero.

(John Cuya)

Día 2

4. Carlos y Daniel juegan sobre un tablero de 25×80, que inicialmente tiene todas sus casillas blancas, de la siguiente forma: En su turno cada jugador elige del tablero una región cuadrada formada solamente por casillas blancas y las pinta de negro. Carlos inicia el juego y luego se van alternando los turnos. Si gana el jugador que pinta de color negro la última casilla blanca del tablero, determine si hay una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores e indíquela.

5. Sea ABC un triángulo acutángulo. En los lados AC y AB, se ubican los puntos M y N, respectivamente. Sean P el punto de intersección de los segmentos BM y CN, y Q un punto en el interior del cuadrilátero $ANPM$ tal que $\angle BQC = 90°$ y $\angle BQP = \angle BMQ$. Si el cuadrilátero $ANPM$ es cíclico, pruebe que $\angle QNC = \angle PQC$.

6. Para cada entero positivo n, sea $f(n)$ el menor entero mayor que n para el cual existe un conjunto M, formado por enteros positivos, que tiene las siguientes propiedades:

- El menor elemento de M es n.
- El mayor elemento de M es $f(n)$.
- El producto de todos los elementos de M es un cuadrado perfecto.

a) Calcule $f(2010)$.

b) Pruebe que existen infinitos enteros positivos n para los cuales $f(n) \leq n + \sqrt{2n}$.

(Jorge Tipe)

Selectivo Cono Sur 2009

Día 1

1. Decimos que una sucesión formada por enteros positivos es *olímpica* si cumple las siguientes dos condiciones:

- Cada entero positivo aparece exactamente una vez en la sucesión.
- Siempre que se suman tres términos consecutivos de la sucesión se obtiene un número que no es un cuadrado perfecto.

Pruebe que existe una sucesión olímpica cuyo primer término es 2009.

(Jorge Tipe)

2. Considere una región poligonal regular de n lados ($n \geq 3$). Pruebe que es posible dividir dicha región en n regiones poligonales de igual área, de tal forma que cada una de ellas tenga n lados.

Aclaración: Las regiones poligonales no son necesariamente convexas.

(Jorge Tipe)

3. En la pizarra están escritos los números

$$00, 01, 02, 03, 04, \ldots, 96, 97, 98, 99$$

y se eliminan algunos de ellos por etapas. En cada etapa se eliminan exactamente 4 números de la forma

$$\overline{a(b-1)},\ \overline{a(b+1)},\ \overline{(a+1)b},\ \overline{(a-1)b}$$

que no hayan sido eliminados antes, tales que $1 \leq a \leq 8$ y $1 \leq b \leq 8$. ¿Cuál es la mínima cantidad de números que pueden quedar escritos en la pizarra, luego de algunas etapas?

(Israel Díaz)

Día 2

4. Para cada número natural k, sea $S(k)$ la suma de las cifras de k en el sistema decimal, por ejemplo, $S(2009) = 2 + 0 + 0 + 9 = 11$. Halle todos los números naturales n para los cuales existen cuatro números naturales $a < b < c < d$, tales que

$$S(a) = S(b) = S(c) = S(d) = S(a + b + c + d) = n.$$

(Jorge Tipe)

5. Sea ABC un triángulo acutángulo, se ubican los puntos D y E en los segmentos BC y AD, repectivamente, de tal forma que

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB}.$$

Sea F el pie de la perpendicular trazada desde D a la recta BE. Suponga que F pertenece al segmento BE y que el cuadrilátero $AFDC$ es cíclico. Pruebe que E pertenece a alguna de las alturas del triángulo ABC.

(Jorge Tipe)

6. Sean $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{10}$ puntos en el espacio, algunos de ellos están unidos por segmentos que no se intersectan. Un escarabajo que está en el punto P_1 se puede trasladar al punto P_{10} pasando por algunos de los segmentos.

Pruebe que al menos una de las dos siguientes proposiciones es verdadera:

i) El escarabajo puede ir de P_1 a P_{10} pasando como máximo por dos puntos del conjunto $\{P_2, P_3, \dots, P_9\}$.

ii) Existen dos puntos P_i y P_j $(2 \leq i < j \leq 9)$ tales que cualquier camino del escarabajo que une P_1 con P_{10} pasa por el punto P_i o por el punto P_j.

Aclaración. El escarabajo se mueve solamente sobre los segmentos.

Selectivo Cono Sur 2008

Día 1

1. ¿Cuál es el menor grado que puede tener un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales si se cumple que

$$P(P(1)) = 2,\ \ P(P(2)) = 3,\ \ P(P(3)) = 1\,?$$

(Jorge Tipe)

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $D(n)$ el conjunto de todos los divisores positivos de n. Hallar el menor k (en función de n) para el cual existen números naturales

$$1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_k \le n$$

tales que

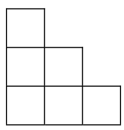
$$D(x_1) \cup D(x_2) \cup \cdots \cup D(x_k) = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

(Jorge Tipe)

3. Dado un triángulo ABC, sean P y Q puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, tales que PQ es paralelo a BC. Sean M el punto medio de BC y X el pie de la altura trazada desde Q hacia PM. Probar que $\angle AXQ = \angle QXC$.

(John Cuya)

4. Encontrar todas las parejas (m, n) de enteros positivos para los cuales un tablero de $m \times n$ puede ser cubierto, sin superposiciones, ni huecos, con fichas de la forma



(John Cuya)

Día 2

5. Un cuadrado de lado 9 ha sido dividido en 81 cuadraditos de lado 1. Consideremos los 100 puntos que son vértices de esos cuadraditos. Si pintamos k de esos vértices de color rojo, ¿cuál es el mayor valor posible de k si queremos que no haya 2 puntos rojos cuya distancia sea de la forma $m\sqrt{2}$, donde m es un entero positivo?

(Claudio Espinoza)

6. En un concurso que consiste de dos exámenes participan N personas. Luego de la corrección de las pruebas se elabora tres listas de la siguiente forma:

- En la lista 1 aparecen las notas del primer examen.
- En la lista 2 aparecen las notas del segundo examen.
- En la lista 3 aparecen las sumas de las notas que cada concursante obtuvo en los 2 exámenes.

Los números escritos en las tres listas son todos distintos, y en cada lista están ordenados de mayor a menor.

Un concursante se dice *clasificado* si su nota pertenece al medio superior de la lista 1 o al medio superior de la lista 2, y además pertenece al tercio superior de la lista 3. ¿Cuál es el menor número de clasificados que puede haber?

Aclaración. En el medio superior están las $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ mayores notas. En el tercio superior están las $\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor$ mayores notas.

(Sergio Vera)

7. Halle todos los números primos $p \geq 3$ para los cuales el número $1 + k(p-1)$ es primo, para cualquier entero positivo $k \leq \dfrac{p-1}{2}$.

Día 3

8. Se tiene el hexágono convexo $ABCDEF$ tal que $\angle FAB = \angle CDE = 90^{\text{o}}$ y el cuadrilátero $BCEF$ es circunscriptible. Pruebe que $AD \leq BC + FE$.

(John Cuya)

9. Emilio y Mariano juegan en un tablero 13×13 de la siguiente forma: Emilio escoge k casillas del borde del tablero y pinta cada una de ellas de negro o blanco, luego Mariano pinta cada una de las otras $(169 - k)$ casillas de negro o blanco, si luego de que todas las casillas están pintadas, Emilio encuentra un subtablero 2×2 que tenga un número impar de casillas negras él gana, caso contrario Mariano gana. Halle el menor k para el cual Emilio tiene estrategia ganadora.

(Jorge Tipe)

10. Para cada entero positivo n, sea $S(n)$ la suma de las cifras de n. Sean a y b dos enteros positivos distintos y no divisibles por 10.

a) Pruebe que existe un entero positivo c tal que $S(c \cdot a) \neq S(c \cdot b)$.

b) Pruebe que existe un entero positivo c tal que $S(c \cdot a) > S(c \cdot b)$.

(Jonathan Farfán)

Selectivo Cono Sur 2007

1. Dado un cuadrado $ABCD$, sean M, K, L y N puntos sobre los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, tales que $\angle MKA = \angle KAL = \angle ALN = 45°$. Pruebe que

$$MK^2 + AL^2 = AK^2 + LN^2.$$

2. Inicialmente se tienen los números 1, 2, 3, 4 escritos alrededor de un círculo (en ese orden). Dos jugadores A y B juegan en forma alternada de la siguiente manera, comenzando el jugador A: A elige dos números vecinos y le suma 1 a ambos, B, a su turno, elige dos números vecinos y los intercambia de lugar. A gana si consigue que todos los números sean iguales. ¿Puede evitar B que A gane?

3. Encuentre todos los enteros positivos n tales que $n+1$ se pueda expresar como la suma de tres divisores positivos de n distintos entre sí.

4. *a*) Pruebe que los números enteros del 1 al 16 pueden ser distribuidos en un tablero de 4×4 , uno en cada casilla, de tal manera que la suma de los números escritos en dos casillas vecinas cualesquiera sea un número primo.

b) ¿Se cumpliría lo mismo si en vez de los números del 1 al 16 se distribuyen los números del 2 al 17?

Aclaración Dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.

Selectivo Cono Sur 2006

1. Encontrar todos los pares de números enteros positivos tales que el último dígito de su suma es 3, su diferencia es un número primo y su producto es un entero cuadrado perfecto.

2. AA_1 y BB_1 son las alturas de un triángulo acutángulo no isósceles ABC. A_0 y B_0 son los puntos medios de BC y CA, respectivamente. El segmento A_1B_1 corta al segmento A_0B_0 en C'. Probar que CC' es perpendicular a la recta que une el ortocentro y circuncentro del triángulo ABC.

3. El conjunto $M = \{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$ se divide en k subconjuntos de tal manera que si $a + b = n^2$, ($a, b \in M$, $a \neq b$, n es un número entero), entonces a y b pertenecen a diferentes subconjuntos. Determinar el menor valor de k.

4. Todas las casillas de un tablero cuadriculado de $(n + 1) \times (n - 1)$ casillas son pintadas con tres colores de modo que, para cada dos columnas distintas cualesquiera y cada dos filas distintas cualesquiera, las cuatro casillas en sus intersecciones no sean pintadas todas del mismo color. Encontrar el mayor valor posible de n.

Selectivo Cono Sur 2005

1. Los enteros positivos 1, 2, 3, ..., se escriben en las casillas de la cuadrícula siguiente, uno en cada casilla, de la forma siguiente:

fila n							
...	15						
fila 4	10	14					
fila 3	6	9	13				
fila 2	3	5	8	12			
fila 1	1	2	4	7	11		
	col. 1	col. 2	col. 3	col. 4	col 5	...	col. m

Encuentre un polinomio $P(x, y)$, tal que para cualesquiera enteros positivos m, n el número escrito en la casilla ubicada en la columna m y fila n sea $P(m, n)$.

2. Sobre veinte puntos en una circunferencia se ubican veinte fichas. Dos jugadores, en forma alternada, retiran tres fichas cualesquiera en cada jugada, hasta que solamente queden dos fichas. Si las dos fichas que quedan eran adyacentes en la ubicación inicial, el jugador que comienza gana; en caso contrario, el otro jugador gana. Analizar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.

3. Sea D el punto medio del lado BC de un triángulo dado ABC. Sean M un punto del lado BC tal que $\angle BAM = \angle DAC$, L el segundo punto de intersección del circuncírculo del triángulo CAM con el lado AB y K el segundo punto de intersección del circuncírculo del triángulo BAM con el lado AC. Pruebe que KL y BC son paralelos.

4. Sea (a_n) la sucesión definida por $a_1 = \dfrac{1}{2}$ y $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$, para $n \geq 1$. Pruebe que para cualquier entero positivo n se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < 1.$$

Selectivo Cono Sur 2004

1. En una lotería especial, al comprar un ticket de lotería, un jugador debe elegir 6 números de 36 posibles. Al momento del sorteo se seleccionan, al azar, 6 números de los 36 disponibles y un ticket es ganador si ninguno de sus números fue seleccionado en el sorteo.

a) Probar que es posible comprar 9 tickes de tal manera que al menos uno de ellos será ganador.

b) Probar que no es posible comprar 8 tickets de tal manera que al menos uno de ellos será ganador.

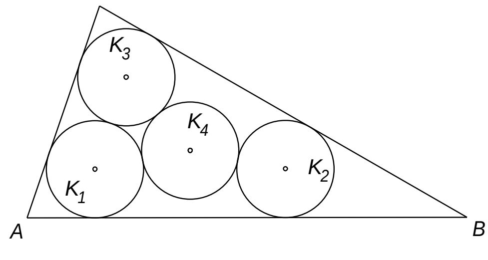
2. Dos piratas encontraron un cofre conteniendo monedas de valores $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2003}$ (hay suficiente cantidad de monedas de cada valor). El primer pirata forma todos los posibles conjuntos de monedas de distintos valores que contienen un número impar de monedas, y toma de cada conjunto la moneda de mayor valor. El segundo pirata forma todos los posibles conjuntos de monedas de distintos valores que contienen un número par de monedas y toma de cada conjunto la moneda de mayor valor. ¿Cuál de ellos se lleva mayor cantidad de dinero y cuánto más?

3. Los números reales α y β satisfacen:

$$\begin{aligned} \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 &= 0, \\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 &= 0 \end{aligned}$$

Encontrar $\alpha + \beta$.

4. En el interior de un triángulo ABC se construyen cuatro circunferencias K_1, K_2, K_3 y K_4, del mismo radio, tales que K_1, K_2 y K_3 son tangentes a dos lados del triángulo y a K_4, como se muestra en la figura:



Probar que el centro de K_4 está ubicado sobre la recta que pasa por el incentro y el circuncentro del triángulo.

Selectivo Cono Sur 2003

1. Determinar todos los números reales a tales que la ecuación $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ tenga cuatro raíces reales que formen una progresión aritmética.

2. Sean p y n enteros positivos tales que p es primo y $1 + np$ es un cuadrado perfecto. Probar que el número $n + 1$ puede ser expresado como la suma de p cuadrados perfectos, donde algunos de ellos pueden ser iguales.

3. Sean M y N puntos sobre el lado BC de un triángulo ABC tales que $BM = CN$ (M se encuentra entre B y N). Los puntos P y Q se encuentran respectivamente sobre AN y AM, de modo que $\angle PMC = \angle MAB$ y $\angle QNB = \angle NAC$. Probar que $\angle QBC = \angle PCB$.

4. Ocho fichas se encuentran sobre un tablero de 8×8 de tal modo que ningún par de ellas están en una misma fila ni en una misma columna. Probar que, entre las distancias entre cada par de fichas, podemos encontrar dos de ellas que son iguales (la distancia entre dos fichas es la distancia entre los centros de las casillas en las que ellas se encuentran).

Selectivo Cono Sur 2002

1. Sean n un número entero positivo y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Pruebe que:

$$\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \frac{3^2}{a_3} + \cdots + \frac{n^2}{a_n} \leq \frac{n}{a_1} + \frac{n-1}{a_2 - a_1} + \frac{n-2}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n - a_{n-1}}.$$

2. Encuentre todos los pares de números enteros (x, y) que satisfacen la ecuación

$$1 + x^2 y = x^2 + 2xy + 2x + y.$$

3. Sean AD, BE y CF las bisectrices interiores del triángulo ABC. Demostrar que si uno de los ángulos $\angle ADF$, $\angle ADE$, $\angle BED$, $\angle BEF$, $\angle CFE$, $\angle CFD$ mide 30° entonces al menos uno más de estos ángulos mide 30°.

4. Determine el menor entero positivo $n \geq 4$ para el cual existe un conjunto de n niños tal que:

- En el conjunto no existe un grupo de 4 niños para el cual cada dos de ellos son amigos.
- Para cualquier elección de k niños del conjunto ($k \geq 1$), entre los cuales no hay amigos, existe, entre los restantes $n - k$ niños, un grupo de 3 niños para el cual cada dos niños son amigos.