Exámenes Selectivos para la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana

Edición: Jorge Tipe

Versión: mayo 2016

Prólogo

En la Olimpiada Iberoamericana de Matemática participan alrededor de 20 países de Sudamérica, Centroamérica, el Caribe y la Península Ibérica. Cada país está representado por un equipo de 4 estudiantes. Pueden participar alumnos que no hayan cumplido 18 años al año anterior de la realización de la Olimpiada, además, un alumno puede participar como máximo dos veces en una Olimpiada Iberoamericana.

La sede cambia anualmente, es así que las últimas ediciones de la Olimpiada Iberoamericana se han realizado en:

- 2015: Mayagüez, Puerto Rico.
- 2014: San Pedro Sula, Honduras.
- 2013: Ciudad de Panamá, Panamá.
- 2012: La Paz, Bolivia.
- 2011: San José, Costa Rica.
- 2010: Asunción, Paraguay.

En el Perú, la Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana está a cargo de la selección de los alumnos, y con este fin se toman exámenes selectivos algunos meses antes de la realización de la olimpiada. Hasta el 2014 se tomaban dos exámenes selectivos, pero a partir del 2015 se toman tres exámenes selectivos.

Si encuentran un error, tienen una sugerencia para aclarar la redacción de un problema, o si tienen cualquier otra consulta con respecto a este archivo, me pueden enviar un correo a `jorgetipe@gmail.com` por lo cual estaré muy agradecido. Iré actualizando este archivo con el paso del tiempo. Por ejemplo, si consigo exámenes de años anteriores a los aquí presentados.

Jorge Tipe Villanueva

Comisión de Olimpiadas
de la Sociedad Matemática Peruana

Selectivo Ibero 2015

Día 1

1. En el triángulo acutángulo ABC, tal que $AB \neq AC$, sea D el pie de la perpendicular trazada desde A a la recta BC. Sean E y F los puntos medios de los segmentos AD y BC, respectivamente. Si G es el pie de la perpendicular trazada desde B a la recta AF, pruebe que EF es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo GFC.

2. Determine el mayor número real λ que tiene la siguiente propiedad: Para todo intervalo no vacío $[a, b]$ que no contiene ningún entero, existe un entero positivo N tal que el intervalo $[Na, Nb]$ no contiene ningún entero y además la longitud del intervalo $[Na, Nb]$ es mayor o igual que λ.

Aclaración: El intervalo $[a, b]$ es el conjunto de todos los números reales x tales que $a \leq x \leq b$. La longitud del intervalo $[a, b]$ es $b - a$.

3. Sea n un entero positivo. Demuestre que el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ se puede particionar en dos conjuntos tales que ninguno de ellos contenga $2n$ elementos en progresión aritmética.

Día 2

4. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de seis enteros positivos distintos dos a dos cuya suma es 90. Escribimos esos números en las caras de un cubo (uno en cada cara). En una *jugada* escogemos tres caras del cubo que tienen un vértice en común, y sumamos 1 a cada uno de los números de esas caras. Determine para cuántos conjuntos $\mathcal{A}$ es posible escribir los elementos de $\mathcal{A}$ en las caras del cubo y luego realizar algunas jugadas para conseguir que todos los números sean iguales.

5. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Definimos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como $f(2k-1) = 2^k$ y $f(2k) = k + \dfrac{2k}{m_k}$, donde m_k es el mayor divisor impar del entero positivo k. Denotemos las funciones $f^0(x) = x$ y $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ para todo entero positivo n. Si x y y son enteros positivos tales que

$$f^{x-1}(2^x) \cdot f^y(1) = 2014,$$

determine todos los posibles valores de $x + y$.

6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de centro O. En los lados AB y CD se consideran los puntos F y E, respectivamente, tales que $EO = FO$. Las rectas AD y BC cortan a la recta EF en los puntos M y N, respectivamente. Finalmente, el punto P es el simétrico de M con respecto al punto medio del segmento AE. Demostrar que los triángulos FBN y CEP son semejantes.

Día 3

7. Hallar el mínimo valor de abc sobre todas las ternas (a, b, c) de enteros positivos que satisfacen la ecuación $a^{-2} + b^{-2} = c^{-2}$.

8. Sea ABC un triángulo tal que $AB > AC$, con circuncírculo ω. Se trazan las tangentes a ω por B y C, y éstas se intersectan en P. La perpendicular a AP por A corta a BC en R. Sea S un punto sobre el segmento PR tal que $PS = PC$.

a) Demuestre que las rectas CS y AR se cortan sobre ω.

b) Sea M el punto medio de BC y Q el punto de intersección de CS y AR. Si ω y el circuncírculo de AMP se cortan en un punto J ($J \neq A$), demuestre que P, J y Q están alineados.

9. Si $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ es una sucesión infinita de dígitos no nulos (es decir $1 \leq a_i \leq 9$ para cada $i \geq 0$), se dice que A es *alternante* si para cada término distinto del primero, este término es estrictamente mayor que sus dos vecinos o estrictamente menor que sus dos vecinos. Se dice que A es *alternante de orden* k si la subsucesión $\{a_{km} : m \geq 0\}$ es alternante.

Determine el mayor entero positivo M para el cual existe una sucesión $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ de dígitos no nulos tal que A es alternante de orden k para cada $k = 1, 2, \ldots, M$.

Selectivo Ibero 2014

Día 1

1. Las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se intersectan en los puntos distintos A y B. Las rectas tangentes a $\mathcal{C}_1$ que pasan por A y B se intersectan en T. Sea M un punto sobre $\mathcal{C}_1$ que está fuera de $\mathcal{C}_2$. La recta MT intersecta nuevamente a $\mathcal{C}_1$ en C, la recta MA intersecta nuevamente a $\mathcal{C}_2$ en K y la recta AC intersecta nuevamente a la circunferencia $\mathcal{C}_2$ en L. Pruebe que la recta MC pasa por el punto medio del segmento KL.

2. Sea $n \geq 4$ un número entero. Se tiene dos tableros de $n \times n$. Cada tablero contiene los números del 1 al n^2 inclusive, un número por casilla, ordenados de forma arbitraria en cada tablero. Un *movimiento* consiste en intercambiar dos filas o dos columnas del primer tablero (no se puede realizar movimientos en el segundo tablero). Pruebe que es posible realizar una secuencia de movimientos de tal modo que para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$, el número que está en la i-ésima fila y j-ésima columna del primer tablero sea diferente al número que está en la i-ésima fila y j-ésima columna del segundo tablero.

3. Un entero positivo n es llamado *especial* si existen enteros $a > 1$ y $b > 1$ tales que $n = a^b + b$. ¿Existe un conjunto de 2014 enteros positivos consecutivos que contenga exactamente 2012 números especiales?

Día 2

4. Determine el mínimo valor de

$$x^{2014} + 2x^{2013} + 3x^{2012} + 4x^{2011} + \cdots + 2014x + 2015,$$

donde x es un número real.

5. La circunferencia inscrita del triángulo acutángulo ABC es tangente a los lados AB y AC en K y L, respectivamente. La altura AH intersecta a las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCA$ en los puntos P y Q, respectivamente. Sean ω_1 y ω_2 las circunferencias circunscritas de los triángulos KPB y LQC, respectivamente. Sea M el punto medio de AH. Si M está fuera de ω_1 y ω_2, pruebe que las longitudes de las tangentes desde M a ω_1 y ω_2 son iguales.

6. Determine el mayor entero positivo k para el cual existe un *grafo simple* G de 2014 vértices que cumple las siguientes condiciones a la vez:

a) G no contiene triángulos.

b) Para cada i entre 1 y k, inclusive, al menos un vértice de G tiene grado i.

c) Ningún vértice de G tiene grado mayor que k.

Aclaración: En un grafo simple dos vértices cualesquiera están unidos a lo más por una arista y no hay lazos, es decir, no hay un vértice que esté unido con sí mismo. Un triángulo es un ciclo formado por tres aristas.

Selectivo Ibero 2013

Día 1

1. Sea (a,b,c) una terna formada por enteros positivos distintos tales que $a+b+c=2013$. Un *paso* consiste en reemplazar la terna (x,y,z) por la terna $(y+z-x, z+x-y, x+y-z)$. Pruebe que, empezando con la terna (a,b,c), después de 10 pasos obtendremos una terna que contiene al menos un número negativo.

2. Sea n un entero positivo y X un conjunto con $|X|=n$. Se dice que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X (distintos entre sí) es *especial* si existen $A,B\in\mathcal{F}$ tales que $A\subset B$ y $|B-A|=1$.

Determine el menor m tal que cualquier familia $\mathcal{F}$ con $|\mathcal{F}|>m$ es especial.

Aclaración: Si C es un conjunto, $|C|$ denota la cantidad de elementos que contiene C; si $\mathcal{S}$ es una familia, $|\mathcal{S}|$ denota la cantidad de subconjuntos que contiene $\mathcal{S}$. Para los conjuntos M y N, $M-N$ denota el conjunto formado por todos los elementos que están en M pero no están N.

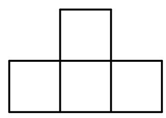
3. Sean a,b,c reales positivos tales que el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a^2x+b^2y+c^2z&=1\\ xy+yz+zx&=1 \end{aligned}$$

tiene solución única (x,y,z) en el conjunto de los números reales. Pruebe que a,b,c representan los lados de un triángulo.

Día 2

4. Cada casilla de un tablero 8×8 contiene exactamente un número 1 ó -1. Considere todas las posiciones de la figura:



sobre el tablero (la figura cubre exactamente cuatro casillas del tablero, la figura se puede rotar pero todas sus casillas deben permanecer dentro del tablero). Una posición de la figura es llamada *pobre* si la suma de los cuatro números que cubre es diferente de cero. Determine el menor número de posiciones pobres que puede haber en total.

5. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia fija, A y B son puntos fijos de $\mathcal{C}$ (con $A \neq B$) y ℓ una recta que no corta a $\mathcal{C}$. Sea P un punto variable de $\mathcal{C}$ tal que los rayos $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ cortan a ℓ en D y E, respectivamente. Pruebe que la circunferencia de diámetro DE es siempre tangente a dos circunferencias fijas conforme P varía en $\mathcal{C}$.

6. *a*) Determine si existe un subconjunto infinito S de los enteros positivos tal que $S \neq \mathbb{Z}^+$ y tal que para cada entero positivo $n \notin S$, exactamente n elementos de S son coprimos con n.

b) Determine si existe un subconjunto infinito S de los enteros positivos tal que para cada $n \in S$, exactamente n elementos de S son coprimos con n.

Aclaración: $\mathbb{Z}^+$ denota el conjunto de los enteros positivos.

Selectivo Ibero 2012

Día 1

1. Para una sucesión finita S, sea $m(S)$ la mayor cantidad de veces que se repite un término de S. Para una sucesión A de $2n+1$ números reales distintos $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ considere la sucesión A' cuyos elementos son:

$$a_1, \frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \ldots, \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1}}{2n+1}.$$

Hallar el mayor valor que puede tomar $m(A')$, sobre todas las sucesiones $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ de números reales distintos.

2. Los cuadrados de una cuadrícula infinita son pintados de blanco y negro, alternando los colores como en un tablero de ajedrez. Todos los cuadrados son de lado 1.

Un polígono $\mathcal{P}$ (no necesariamente convexo) de área A y perímetro B está formado por algunos cuadrados (es decir, los lados del polígono están incluidos en las líneas de la cuadrícula). Probar que $\mathcal{P}$ no contiene más de $\frac{4A+B}{8}$ cuadrados negros.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Probar que

$$\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180°.$$

Día 2

4. Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ enteros positivos distintos tales que ninguno de ellos es un cubo perfecto. Considere todos los productos de la forma $a_i a_j$, con $1 \leq i < j \leq 8$, y sea N la cantidad de esos productos que son cubos perfectos. Halle el mayor valor posible de N.

5. Un conjunto $\mathcal{A}$ de sucesiones de ceros y unos, todas de longitud 5, se llama *universal* si se cumple que toda sucesión infinita de ceros y unos contiene 5 términos consecutivos que forman un elemento de $\mathcal{A}$. Determine la menor cantidad de elementos que puede tener un conjunto universal.

6. Pruebe que existen infinitos enteros positivos compuestos n tales que $(3^{n-1} - 2^{n-1})$ es múltiplo de n.

Selectivo Ibero 2011

Día 1

1. Encuentre todos los números enteros $m > 1$ para los cuales la suma de los cubos de los dígitos de cualquier múltiplo de m también es múltiplo de m.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno y sea H su ortocentro. Las rectas BH y CH cortan a AC y AB en D y E, respectivamente. La circunferencia circunscrita al triángulo ADE corta a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en un punto F distinto de A. Pruebe que las bisectrices interiores de los ángulos $\angle BFC$ y $\angle BHC$ se cortan en un punto sobre el segmento BC.

3. Sean p y q enteros positivos. Halle el menor entero positivo m (en función de p y q) para el cual entre cualesquiera m enteros distintos del intervalo $[-p, q]$ existen tres cuya suma es cero.

Día 2

4. Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cinco números reales cuya suma es 0 y tales que $|a_i - a_j| \leq 1$, para todos los índices $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pruebe que

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \leq \frac{6}{5}$$

5. En un tablero de $n \times n$ casillas, cada casilla tiene escrito un signo «+» o un signo «−». Una *operación* consiste en escoger una fila o una columna y remplazar cada signo en dicha fila o columna por su signo opuesto. Se sabe que al inicio hay exactamente 2 signos «−» en el tablero (y todos los otros son «+») y que después de algunas operaciones hay exactamente 9 signos «−» en el tablero. Determine el menor y el mayor valor posible de n para que ocurra esto.

6. Sea n un número entero mayor o igual que 3 y sea $\mathcal{L}$ una colección de n rectas del plano en posición general (es decir, en $\mathcal{L}$ no hay dos rectas paralelas ni tres concurrentes). Para cada terna de rectas de $\mathcal{L}$ consideramos el disco circular abierto inscrito en el triángulo determinado por esas rectas. Halle, en función de n, el número de tales discos que no son intersectados por ninguna recta de $\mathcal{L}$.

Aclaración. Un disco circular abierto no incluye el borde del disco.

Selectivo Ibero 2010

Día 1

1. Sea n un entero positivo. Sabemos que el conjunto $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ tiene exactamente 2^n subconjuntos, en consecuencia, hay 8^n ternas ordenadas (A, B, C), donde A, B y C son suconjuntos de I_n. Para cada una de estas ternas consideramos el número $|A \cap B \cap C|$. Pruebe que la suma de los 8^n números considerados es múltiplo de n.

Aclaración: $|Y|$ denota la cantidad de elementos del conjunto Y.

2. Para cada entero positivo k sea $S(k)$ la suma de los dígitos de k en el sistema decimal. Encuentre todos los enteros positivos N para los cuales existen enteros positivos a, b, c, coprimos dos a dos, tales que:

$$S(ab) = S(bc) = S(ca) = N.$$

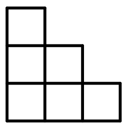
3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias concéntricas de centro O, de tal forma que el radio de $\mathcal{C}_1$ es menor que el radio de $\mathcal{C}_2$. Sea P un punto distinto de O que está en el interior de $\mathcal{C}_1$, y L una recta que pasa por P y corta a $\mathcal{C}_1$ en A y B. El rayo OB corta a $\mathcal{C}_2$ en C. Determine el lugar geométrico que determina el circuncentro del triángulo ABC conforme L varía.

Día 2

4. Halla el menor entero $k > 1$ para el cual $n^k - n$ es múltiplo de 2010 para todo entero positivo n.

5. El trapecio $ABCD$ de bases AB y CD está inscrito en una circunferencia Γ. Sea X un punto variable del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a C ni a D. Sea Y el punto de intersección de AB y DX, y sea Z el punto del segmento CX tal que $\dfrac{XZ}{XC} = \dfrac{AY}{AB}$. Demuestre que la medida del ángulo $\angle AZX$ no depende de la elección de X.

6. En un tablero de $n \times n$, el conjunto de todas las casillas que están ubicadas en la diagonal principal del tablero o debajo de ella, es llamado n-*escalera*. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra una 3-escalera:



¿De cuántas formas se puede dividir una 99-escalera en algunos rectángulos, que tengan sus lados sobre líneas de la cuadrícula, de tal forma que todos los rectángulos tengan áreas distintas?

Selectivo Ibero 2009

Día 1

1. Un conjunto P tiene la siguiente propiedad: " Para cualquier entero positivo k, si p es un factor primo de $k^3 + 6$, entonces p pertenece a P ". Pruebe que P es infinito.

2. Un mago y su asistente hacen su presentación frente a un público de muchas personas. En el escenario hay un tablero 8×8, el mago se venda los ojos, y luego el asistente va invitando a personas del público para que escriban los números $1, 2, 3, 4, \ldots, 64$ en las casillas que quieran (un número por casilla) hasta completar los 64 números. Después el asistente tapa dos casillas adyacentes, a su elección. Finalmente, el mago se saca la venda de los ojos y tiene que "adivinar"qué número hay en cada casilla que tapó el asistente. Explicar cómo armaron este truco.

Aclaración: Dos casillas son adyacentes si tienen un lado en común.

3. Sean M, N, P los puntos medios de los lados AB, BC, CA de un triángulo ABC. Sea X un punto fijo en el interior del triangulo MNP. Las rectas L_1, L_2, L_3 que pasan por el punto X son tales que L_1 intersecta al segmento AB en el punto C_1 y al segmento AC en el punto B_2; L_2 intersecta al segmento BC en el punto A_1 y al segmento BA en el punto C_2; L_3 intersecta al segmento CA en el punto B_1 y al segmento CB en el punto A_2. Indique cómo construir las rectas L_1, L_2, L_3 de manera que la suma de las áreas de los triángulos A_1A_2X, B_1B_2X y C_1C_2X sea mínima.

Día 2

4. Sea ABC un triángulo tal que $AB < BC$. Se traza la altura BH con H en AC. Sean I el incentro del triángulo ABC y M el punto medio de AC. Si la recta MI interseca a BH en el punto N, pruebe que $BN < IM$.

5. Sean a, b, c enteros positivos cuyo máximo común divisor es 1. Determine si siempre existe un entero positivo n tal que, para todo entero positivo k, el número 2^n no es un divisor de $a^k + b^k + c^k$.

6. Sea P un conjunto de $n \geq 2$ puntos distintos en el plano, que no contiene ninguna terna de puntos alineados. Sea S el conjunto de todos los segmentos que tienen por extremos a puntos de P. Dados dos segmentos $s_1, s_2 \in S$, escribiremos $s_1 \otimes s_2$ si la intersección de s_1 con s_2 es un punto distinto de los extremos de s_1 y s_2.

Demostrar que existe un segmento $s_0 \in S$ tal que el conjunto $\{s \in S \mid s_0 \otimes s\}$ tiene al menos $\dfrac{1}{15}\dbinom{n-2}{2}$ elementos.

Selectivo Ibero 2008

1. Para cada número entero $m > 1$, sea $p(m)$ el menor divisor primo de m. Si a y b son enteros mayores que 1, tales que

$$a^2 + b = p(a) + [p(b)]^2,$$

demostrar que $a = b$.

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean P y Q puntos en el interior de $ABCD$ tal que $PQDA$ y $QPBC$ son cuadriláteros cíclicos. Suponga que exista un punto E en el segmento PQ tal que $\angle PAE = \angle QDE$ y $\angle PBE = \angle QCE$. Pruebe que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

3. En el plano coordenado, considere el conjunto S de todos los puntos cuyas coordenadas son números enteros. Para un entero positivo k, dos puntos distintos $A, B \in S$ son llamados k-amigos si existe un punto $C \in S$ tal que el área del triángulo ABC es igual a k. Un conjunto $T \subset S$ es llamado k-completo si dos puntos cualesquiera de T son k-amigos. Halle el menor entero positivo k para el cual existe un conjunto k-completo que tiene más de 200 elementos.

Selectivo Ibero 2007

1. Resolver en el conjunto de los números reales, el sistema:

$$\begin{aligned} x(3y^2+1) &= y(y^2+3) \\ y(3z^2+1) &= z(z^2+3) \\ z(3x^2+1) &= x(x^2+3). \end{aligned}$$

2. Encontrar todos los enteros positivos m y n que satisfacen la igualdad

$$n^5 + n^4 = 7^m - 1.$$

3. Se tiene un triángulo acutángulo ABC. Consideremos el cuadrado $A_1A_2A_3A_4$ que tiene un vértice en AB, un vértice en AC y dos vértices (A_1 y A_2) en BC y sea $x_A = \angle A_1AA_2$. Análogamente se definen x_B y x_C. Probar que $x_A + x_B + x_C = 90°$.

4. Cada una de las casillas de un tablero de 15×15 tiene un cero. En cada paso se escoge una fila o una columna, borramos todos los números de ella y luego escribimos los números del 1 al 15 en las celdas vacías, en un orden arbitrario. Encontrar la suma máxima posible de los números en el tablero que se puede lograr después de un número finito de pasos.