



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2016)

Tercera Fase - Nivel 3

22 de setiembre de 2016

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. El producto de tres números enteros positivos distintos es 2000 y ninguno de ellos es múltiplo de 25. Calcule la suma de esos tres números.
2. Determine el **mayor** valor entero que puede tomar la siguiente expresión:

$$\frac{\square + \square + \square + \square}{\square + \square - \square}$$

si en los cuadrados deben estar escritos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 en algún orden (sin que se repitan).



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Tercera Fase - Nivel 3

3. En una mesa hay nueve tarjetas enumeradas del 1 al 9. Ana toma tres tarjetas, Beatriz toma otras tres tarjetas y Carla se queda con las tres tarjetas sobrantes. Resulta que ninguna de ellas tiene dos tarjetas con números consecutivos, además, la suma de los números de las tarjetas de Beatriz es el doble de la suma de los números de las tarjetas de Ana. Si una de las tarjetas de Carla tiene el número 5, determine la suma de los números de las otras dos tarjetas de Carla.

4. Jesús y Samael trabajarán en el directorio de una empresa junto con otras cuatro personas. El primer día de trabajo se formarán dos equipos de tres personas, por medio de un sorteo. Si la probabilidad de que Jesús y Samael estén en el mismo grupo es del $n\%$, determine el valor de n .

5. Halle el área del triángulo cuyos vértices en el plano cartesiano son los puntos $(3, 2)$, $(1, -2)$ y $(2^{20}, 2^{21})$.

6. ¿Para cuántos números primos p existe un número primo q tal que $p^2 + 11pq + 25q^2$ es un cuadrado perfecto?

7. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 80^\circ$ y $\angle ABC = 40^\circ$. Sean D y E puntos sobre los lados AB y BC , respectivamente, tales que DE es perpendicular a AB y $AD = CE$. Si $\angle DCE = \alpha^\circ$, determine el valor de 2α .



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Tercera Fase - Nivel 3

8. Sean a, b, c y d números enteros positivos tales que $\frac{a}{480}$, $\frac{b}{630}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones irreducibles y además:

$$\frac{a}{480} + \frac{b}{630} = \frac{c}{d}.$$

Determine el menor valor posible de d .

Aclaración: Una fracción $\frac{m}{n}$ es *irreducible* si el máximo común divisor de m y n es 1.

9. Sean x, y, z reales positivos tales que

$$x^2 + xy + y^2 = 5,$$

$$y^2 + yz + z^2 = 6,$$

$$z^2 + zx + x^2 = 8.$$

Calcule el valor de $(xy + yz + zx)^2$.

10. Para cada conjunto no vacío S de números enteros positivos, sea S^* el conjunto que se obtiene al sumar 2 a cada elemento de S . Por ejemplo, si $A = \{2, 4, 5\}$ entonces $A^* = \{4, 6, 7\}$. ¿Para cuántos conjuntos S se cumple que la unión de S con S^* es el conjunto de todos los enteros positivos del 1 al 19, es decir, $S \cup S^* = \{1, 2, 3, \dots, 18, 19\}$?

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN