IV Taller de Olimpiadas Matemáticas para Profesores 2014

Problemas de Estrategias

Juan Neyra Faustino

Introducción

Los *problemas de estrategia* están relacionados con *juegos* en los que participan dos jugadores, los cuales van jugando por turnos siguiendo ciertas reglas establecidas por el juego. Hay muchos tipos de juegos en los que participan dos jugadores, pero vamos a analizar solo aquellos juegos en los que uno de los dos jugadores tiene una estrategia para ganar el juego sin importar cómo juegue su oponente. Usualmente este tipo de juegos son los que se presentan en muchas olimpiadas.

Veremos varios ejemplos de estos juegos, y mostraremos cómo encontrar la estrategia ganadora.

Las principales estrategias utilizadas son:

1. el uso de la simetría,
2. el uso de emparejamiento de jugadas, y
3. el uso de las posiciones ganadoras y perdedoras.

Características de los juegos

Las características que deben cumplir los juegos que vamos a analizar son las siguientes:

1. Participan dos jugadores, digamos A y B.
2. Los jugadores juegan por turnos. Generalmente A realiza el primer turno.
3. El juego es finito, es decir, en algún momento debe finalizar.
4. El juego tiene bien establecido cómo juegan los jugadores, y cómo es que un jugador gana (o pierde) el juego.
5. Uno de los dos jugadores ganará el juego sin importar cómo juegue su oponente, es decir, uno de los dos jugadores tiene estrategia ganadora.

Recordemos que para resolver un problema de estrategias, debemos determinar cuál es el jugador que tiene estrategia ganadora, y describir cuál es dicha estrategia que le permitirá asegurar la victoria sin importar cómo juegue su oponente.

Simetría

1. A y B juegan, por turnos, a pintar de rojo las casillas de un tablero de 4×4, el cual tiene, inicialmente, todas sus casillas blancas. En cada turno, cada jugador debe pintar de rojo una casilla del tablero que aún está sin pintar y que no es adyacente a una casilla que ya ha sido pintada anteriormente. Pierde el primer jugador que no puede realizar su jugada. Si A empieza el juego, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?

   Aclaración: Dos casillas son adyacentes si comparten un lado.

2. A y B juegan, por turnos, a pintar de rojo las casillas de un tablero de 5×5, el cual tiene, inicialmente, todas sus casillas blancas. En cada turno, cada jugador debe pintar de rojo una casilla del tablero que aún está sin pintar y que no es adyacente a una casilla que ya ha sido pintada anteriormente. Pierde el primer jugador que no puede realizar su jugada. Si A empieza el juego, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?

   Aclaración: Dos casillas son adyacentes si comparten un lado.

3. Carlos y Daniel juegan sobre un tablero de 9×20, que inicialmente tiene todas sus casillas blancas, de la siguiente forma: En su turno cada jugador elige del tablero una región cuadrada formada solamente por casillas blancas y las pinta de negro. Carlos inicia el juego y luego se van alternando los turnos. El ganador es el último jugador que pinta de negra la última casilla blanca del tablero, determine si hay una estrategia ganadora para alguno de los jugadores e indíquela.

Selectivo Perú 2010

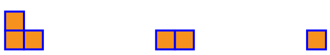
Emparejamientos

4. Ana y Brenda juegan, por turnos, a escribir sus iniciales en las casillas de un tablero de 8×8, el cual, al inicio, tiene todas sus casillas vacías. En cada turno, cada jugador debe escribir su inicial en una casilla vacía del tablero. Escriben sus iniciales hasta llenar todas las casillas del tablero. Si Ana consigue escribir sus iniciales en las 5 casillas de un rectángulo de 1×5 ó de 5×1, entonces ella gana el juego, de lo contrario, Brenda gana el juego. Si Ana empieza el juego, ¿cuál de las dos tiene estrategia ganadora?

5. Dado un tablero de 2×18. Ivan y Peter juegan el siguiente juego. Ivan inicia, y coloca un dominó horizontal que cubre exactamente dos casillas del tablero. Luego Peter coloca un dominó vertical que cubre exactamente dos casillas del tablero. Luego Ivan coloca un dominó horizontal. Luego Peter coloca un dominó vertical, y así continúan jugando. La persona quien no pueda colocar su dominó perderá el juego. Determine quién tiene una estrategia ganadora.

Olimpiada Nacional de Bulgaria 2010

6. A y B juegan alternadamente sobre un tablero de 18×24 con suficientes fichas de los siguientes tipos:



Tipo 1 **Tipo 2** **Tipo 3**

En su turno, A debe colocar una ficha del tipo 1 sobre casillas vacías del tablero. B, en su turno, debe colocar exactamente una ficha de cada tipo sobre casillas vacías del tablero. Pierde el jugador que ya no puede realizar su jugada. Si empieza A, decida quién tiene una estrategia ganadora.

Aclaración: Las fichas se pueden rotar pero no se pueden superponer, ni salir del tablero. Las fichas del tipo 1, 2 y 3 se colocan exactamente sobre 3, 2 y 1 casillas del tablero respectivamente.

Cono Sur 2012

7. En una caja yace un conjunto completo de dominós de orden 6. (Esto es, para cada par de enteros i, j con $0 \leq i \leq j \leq 6$, existe exactamente un dominó con i en una casilla y con j en la otra.) Dos jugadores se turnan para seleccionar un dominó de la caja y lo agregan a uno de los extremos de una cadena lineal abierta en la mesa, de tal manera que dominós adyacentes tengan los mismos números en sus casillas adyacentes. (El movimiento del primer jugador puede ser cualquier dominó.) El primer jugador que no pueda mover pierde. ¿Cuál de los jugadores tiene estrategia ganadora?

Rusia 1999

Posiciones Ganadoras

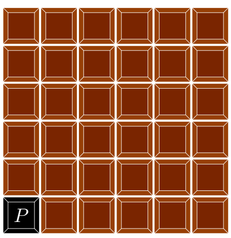
Algunos tipos de juegos poseen ciertas configuraciones que siempre llevan al jugador que le toca jugar a la victoria. Esas configuraciones son llamadas *posiciones ganadoras*. Todas las demás configuraciones son las *posiciones perdedoras*.

Veamos algunos problemas, en los que se utiliza esta idea.

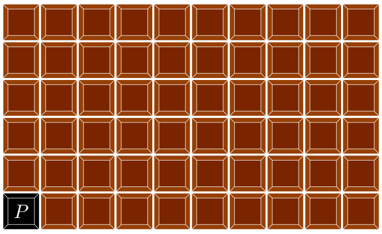
8. Sobre una mesa hay, en un inicio, 15 piedras. Los jugadores A y B juegan, por turnos, a retirar piedras de la mesa. En cada turno está permitido retirar 1, 2 ó 3 piedras. Aquel jugador que retire la última piedra gana el juego. ¿Cuál de los dos jugadores puede asegurar una victoria?

9. Sobre una mesa hay, en un inicio, 100 piedras. Los jugadores A y B juegan, por turnos, a retirar piedras de la mesa. En cada turno está permitido retirar $1, 2, 4, 8, \ldots$ piedras (cualquier potencia de 2). Aquel jugador que retire la última piedra gana el juego. ¿Cuál de los dos jugadores puede asegurar una victoria?

10. Se tiene un chocolate en forma de un tablero de 6×6, con una casilla negra prohibida (P). Dos jugadores A y B juegan el siguiente juego tomando turnos alternados. En un solo movimiento, se puede partir el chocolate en dos partes por una línea recta (una que sea del límite de las casillas) y comer la parte que no contiene la casilla P. El jugador que no pueda hacer un movimiento pierde. Si A comienza, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?



11. Se tiene un chocolate en forma de un tablero de 6×10, con una casilla negra prohibida (P). Dos jugadores A y B juegan el siguiente juego tomando turnos alternados. En un solo movimiento, se puede partir el chocolate en dos partes por una línea recta (una que sea del límite de las casillas) y comer la parte que no contiene la casilla P. El jugador que no pueda hacer un movimiento pierde. Si A comienza, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?



Problemas Propuestos

12. Marcamos veinte puntos en una circunferencia. Los jugadores A y B juegan, por turnos, a unir dos de los puntos. Cada jugador puede unir dos de esos puntos si ese nuevo segmento formado no corta a los hechos anteriormente. Quien no puede trazar ningún segmento más pierde. Si A comienza el juego, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?

13. En una caja existen 300 bolitas. Los jugadores A y B juegan, por turnos, retirar bolitas de la caja. Cada jugador puede retirar no más de la mitad de las bolitas que están en la caja. El jugador que no puede jugar más pierde. Si A comienza el juego, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?

14. Dos jugadores A, B y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

15. En un tablero de ajedrez hay un rey en una esquina. A y B se turnan moviendo el rey a cualquier casilla que tenga al menos un vértice en común con la ocupada por el rey y que no haya sido visitada previamente. El primero que no pueda jugar pierde. ¿Qué jugador tiene una estrategia ganadora, y cuál es? ¿Y si se cambia el rey por un caballo?

16. Se dan 98 puntos sobre una circunferencia. María y José juegan alternadamente de la siguiente manera: cada uno de ellos traza un segmento uniendo dos de los puntos dados que no hayan sido unidos entre si anteriormente. El juego termina cuando los 98 puntos han sido usados como extremos de un segmento al menos una vez. El vencedor es la persona que realiza el último trazo. Si José inicia el juego, ¿quién puede asegurarse la victoria?

17. Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

18. Todos los divisores positivos de un entero positivo N son escritos en la pizarra. Dos jugadores A y B juegan el siguiente juego tomando movimientos alternados. En el primer movimiento, el jugador A borra N. Si el último número borrado es d, entonces el siguiente jugador borra o un divisor de d o un múltiplo de d. El jugador que no puede hacer un movimiento pierde. Determinar todos los números N para los cuales A puede ganar de forma independiente de los movimientos de B.

Middle European Mathematical Olympiad 2010

19. Javier y Paul juegan por turnos de la siguiente manera: En el turno 1, Javier escribe 1 ó 2 en la pizarra; en el turno 2, Paul escribe 2 ó 3; en el turno 3, Javier escribe 3 ó 4, y así sucesivamente hasta el turno n y finaliza el juego. Javier gana si la suma de todos los números escritos es múltiplo de 3, en cualquier otro caso gana Paul. Determina quién de los dos tiene estrategia ganadora, en cada uno de los siguientes casos:

    a) Cuando n es par.
    b) Cuando $n = 2011$.

ONEM 2011

20. Se marcan N puntos sobre una circunferencia ($N \geq 5$) de modo que los N arcos formados tienen la misma longitud. Se colocan N fichas sobre los N puntos marcados (una ficha por cada punto). Dos jugadores, Ricardo y Tomás juegan retirando las fichas colocadas, de acuerdo con las siguientes reglas:

    - Los turnos de juego son intercalados.
    - Empieza Ricardo.
    - Si en el turno de un jugador hay tres fichas tales que los correspondientes puntos marcados forman un triángulo no obtusángulo, el jugador debe retirar una de esas fichas.
    - Pierde el jugador que no puede retirar ficha alguna en su turno.

    ¿Algún jugador tiene estrategia ganadora? En caso afirmativo, ¿en qué consiste tal estrategia?

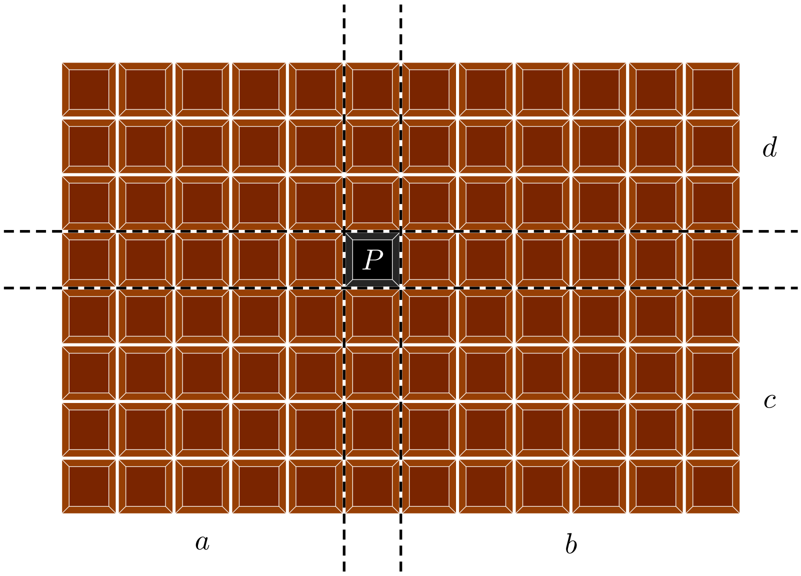
ONEM 2009

21. En un montón hay 1000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras alternadamente. El primer jugador en su primera jugada puede retirar todas las piedras que quiera, pero no todas, y debe retirar por lo menos una. A partir de allí cada jugador debe retirar al menos una piedra y como máximo el doble de las que retiró su contrario en la jugada precedente. El que retira la última piedra gana. Determinar cuál jugador tiene estrategia una ganadora y encontrarla.

22. Alicia y Bob juegan un juego en el cual ellos toman turnos para remover piedras de un montículo que inicialmente tiene n piedras. El número de piedras removidas en cada turno debe ser uno menos que un número primo. El ganador es el jugador quien tome la última piedra. Alicia juega primero. Pruebe que existen infinitos n tal que Bob tiene una estrategia ganadora. (Por ejemplo, si $n = 17$, entonces Alicia quizás toma 6 piedras dejando 11; luego Bob quizás tome 1 piedra dejando 10; luego Alicia puede tomar las piedras restantes para ganar.)

Putnam Competition 2006

23. Se tiene un chocolate en forma de un tablero de $m \times n$. En este chocolate una de sus casillas ha sido marcada como prohibida (P). Dos jugadores A y B juegan el siguiente juego tomando movimientos alternados. En un solo movimiento, se puede partir el chocolate en dos partes por una línea recta (una que sea del límite de las casillas) y comer la parte que no contiene la casilla prohibida. El jugador que no pueda hacer un movimiento pierde. ¿Cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora dependiendo de la casilla que ha sido marcada como prohibida?



Juan Neyra Faustino
juan.neyra@gmail.com

Lima, 15 de febrero de 2014.

Editorial Binaria