



XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

Tercera Fase - Nivel 2

2 de octubre de 2014

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos. Te recomendamos que revises bien tus respuestas.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Recuerda que las respuestas correctas se calificarán con diez (10) puntos; y las no respondidas o mal respondidas se calificarán con cero (0) puntos.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Santiago estaba viendo el canal del tiempo y se percató de lo siguiente: la temperatura en Pucallpa era 4° C más que en Chiclayo, la temperatura en Chiclayo era 2° C más que en Lima, la temperatura en Lima era 2° C más que en Tacna, la temperatura en Tacna era 4° C más que en Puno y la temperatura en Puno era, en grados celsius, la mitad que en Pucallpa. ¿Cuál era la temperatura en Tacna?
2. Un trapecio isósceles tiene bases paralelas de longitudes 8 cm y 20 cm, y los lados no paralelos miden 10 cm cada uno. ¿Cuál es el área de dicho trapecio, en cm^2 ?



Tercera Fase - Nivel 2

3. En una compañía de autos vendieron 500 autos el año pasado. Se sabe que cada mes de dicho año, a partir de febrero, vendieron un auto más que el mes anterior, excepto en uno de los meses en el que vendieron dos autos más que el mes anterior. ¿Cuántos autos vendieron en el mes de octubre de dicho año?
4. En un restaurante, cada mesa tiene exactamente n sillas. En cierto momento no hay ninguna mesa vacía y las cantidades de mesas que tienen $1, 2, 3, \dots, n$ personas son iguales a $1, 2, 3, \dots, n$, respectivamente. Determine la cantidad de mesas, sabiendo que esta cantidad es igual a la cantidad de sillas desocupadas que hay en el restaurante.

Nota: Puedes usar la siguiente igualdad $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. La profesora Gabriela va a repartir 30 caramelos entre sus 8 alumnos, de tal forma que cada alumno reciba al menos 1 caramelo y algún alumno reciba más de 4 caramelos. Además, de los 8 alumnos, al menos 4 alumnos van a recibir más de 1 caramelo. ¿Como máximo cuántos caramelos puede recibir uno de sus alumnos?
6. Si a y b son reales positivos tales que

$$a^2 + \frac{1}{b} = 7,$$

$$b^2 + \frac{1}{a} = 3,$$

determine el valor de

$$a^2b^2 + \frac{2ab + 10}{a + b}.$$

7. ¿Cuántos enteros positivos n menores que 2014 cumplen que n es igual a la suma de los dígitos de $3n + 920$?
8. Sea \mathbb{Q}^+ el conjunto de los números racionales positivos. Sea $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ una función que cumple las siguientes propiedades:
- $f(1) = 1$,
 - $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{Q}^+$,
 - $(x + 1) \cdot f(x) = x \cdot f(x + 1)$, para todo $x \in \mathbb{Q}^+$.

Determine el valor de $f\left(\frac{20}{14}\right)$.



PERÚ

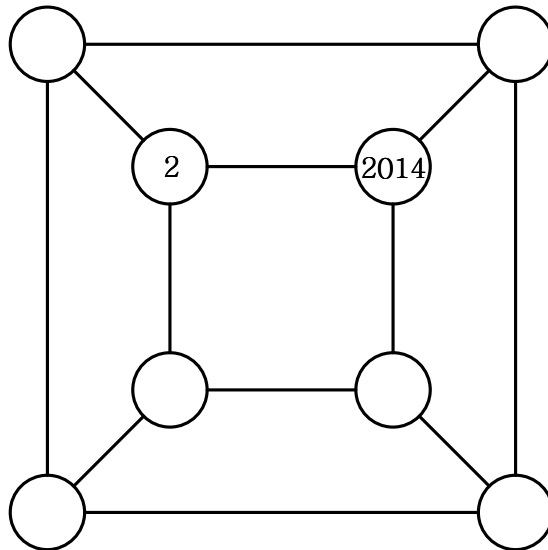
Ministerio de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Tercera Fase - Nivel 2

9. ¿Cuántos números de 5 dígitos cumplen que cada uno de sus dígitos es mayor que 4, y además la suma de sus 5 dígitos es impar?
10. Decimos que dos enteros positivos son *amigos* si uno de esos números es múltiplo del otro. Por ejemplo, los números 9 y 3 son amigos; mientras que los números 6 y 9 no son amigos. En cada círculo de la siguiente figura tiene que escribirse un entero positivo (los números 2 y 2014 ya están escritos) de tal forma que si dos números están unidos por un segmento entonces son amigos, y si dos números no están unidos por un segmento entonces no son amigos. Determine el menor valor que puede tomar la suma de los ocho números.



GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN