



## X OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2013)

### Primera Fase - Nivel 3

23 de agosto de 2013

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.

#### MARCA LA ALTERNATIVA CORRECTA EN LA HOJA DE RESPUESTAS

1. El número 2013 se puede expresar como el producto de tres números primos. Halla la diferencia entre el mayor y el menor de esos números primos.  
A) 9                      B) 41                      C) 50                      D) 54                      E) 58
2. Si  $\theta$  es un ángulo agudo tal que  $\sec \theta = \frac{5}{4}$ , halla el valor numérico de  
$$\frac{2 \operatorname{sen} 30^\circ + 3 \operatorname{csc} \theta}{\sqrt{2} \cos 45^\circ + \sqrt{3} \cot 60^\circ}$$
  
A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5
3. En la Olimpiada Nacional Escolar de Biología (ONEB) participan grupos de tres estudiantes. Para que un grupo de estudiantes sea aceptado en la Olimpiada se debe cumplir que el promedio de sus edades al momento de la inscripción debe ser estrictamente menor que 15. Raúl y Saúl son dos amigos cuyas edades son 13 y 15, respectivamente, y quieren participar en la Olimpiada pero necesitan conseguir un estudiante más para que juntos formen un grupo, ¿cuál es la edad máxima que puede tener este estudiante?  
A) 17                      B) 16                      C) 15                      D) 14                      E) 13
4. Kevin tiene en total 20 monedas, entre monedas de S/. 5 y de S/. 2. Si la cantidad de monedas de cada valor se intercambian, la cantidad total de dinero aumentaría en S/. 18. ¿Cuánto dinero tenía Kevin al inicio?  
A) S/. 61                      B) S/. 79                      C) S/. 85                      D) S/. 59                      E) S/. 48



### Primera Fase - Nivel 3

5. Sea  $\mathcal{A}$  el conjunto de los enteros positivos que son múltiplos de 3; y  $\mathcal{B}$  el conjunto de los enteros positivos que son múltiplos de 6. Determine cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas:

- $1002 \in \mathcal{B}$ .
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ .
- $2013 \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ .
- $18 \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ .

A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4

6. Se tiene un triángulo rectángulo  $ABC$ , recto en  $B$ . Si se cumple que:

$$\frac{\operatorname{sen} A + \tan C}{\tan A + \sec C} = \frac{1}{2},$$

determina el valor de  $\tan A$ .

A) 1                      B)  $\sqrt{3}$                       C) 2                      D)  $\frac{1}{2}$                       E) 3

7. Sean  $a$  y  $b$  números reales positivos tales que  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$ . Halla el valor numérico de  $\frac{a+b}{a-b}$

A)  $\sqrt{2}$                       B)  $\sqrt{3}$                       C) 2                      D) 3                      E)  $\sqrt{5}$

8. El profesor le dijo a José que simplifique la siguiente expresión:

$$M = 4\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{97 - 56\sqrt{3}},$$

después de mucho esfuerzo consiguió simplificar la expresión, y se sorprendió al darse cuenta que  $M$  es un número entero, ¿cuál es ese número?

A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5

9. Ángel, Benjamín, Carlos, Daniel y Ernesto son cinco sospechosos de haber robado un reloj de oro. El juez, luego de haber visto el video de seguridad de la tienda, sabe que el ladrón actuó solo. Luego del interrogatorio algunas de las respuestas fueron:

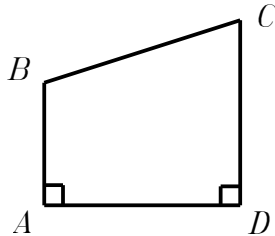
- Ángel: Yo no robé el reloj.
- Benjamín: Carlos robó el reloj.
- Carlos: Daniel es inocente.
- Daniel: Benjamín robó el reloj.
- Ernesto: Yo no robé el reloj.

Si el ladrón fue el único que mintió, ¿quién es el ladrón?

A) Ángel                      B) Benjamín                      C) Carlos                      D) Daniel                      E) Ernesto

**Primera Fase - Nivel 3**

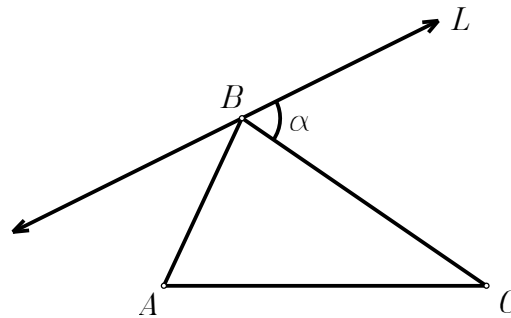
10. En la figura mostrada,  $ABCD$  es un cuadrilátero tal que  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  son perpendiculares a  $\overline{AD}$ , con  $AB + CD = BC$ ,  $AB < CD$  y  $AD = 8$ . Halla el valor de  $AB \cdot CD$ .



- A) 16                      B) 8                      C) 4                      D) 2                      E) 1
11. En una bolsa negra hay 3 canicas rojas y 2 azules. Mateo extrae de la bolsa una canica, y después Alfonso extrae otra canica, ¿cuál es la probabilidad de que las canicas extraídas sean de colores diferentes?
- A)  $\frac{1}{2}$                       B)  $\frac{3}{4}$                       C)  $\frac{2}{5}$                       D)  $\frac{3}{5}$                       E)  $\frac{2}{3}$
12. Encuentra el número de pares ordenados  $(a, b)$  de enteros positivos tales que:

$$1 < a < b + 2 < 13.$$

- A) 45                      B) 55                      C) 65                      D) 144                      E) 90
13. Sea  $ABC$  un triángulo cuyos lados son  $AB = 8$ ,  $BC = 15$  y  $AC = 17$ . Se traza una recta  $L$  que pasa por  $B$  y que no corta al triángulo. Si la distancia de  $A$  a la recta  $L$  es a la distancia de  $C$  a la recta  $L$  como 2 es a 5, determine el valor de  $\tan \alpha$ .



- A) 1                      B)  $\frac{4}{3}$                       C)  $\frac{3}{4}$                       D) 2                      E)  $\frac{3}{2}$
14. Sean  $a, b, c$  números reales tales que

$$\begin{aligned}
 a - 7b + 8c &= 4 \\
 8a + 4b - c &= 7.
 \end{aligned}$$

Determina el valor de  $a^2 - b^2 + c^2$ .

- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D)  $\frac{1}{7}$                       E)  $\frac{1}{2}$



Primera Fase - Nivel 3

15. Sean  $x_1$  y  $x_2$  las raíces de la ecuación  $x^2 - 4x + 1 = 0$ . Halla el valor de

$$(x_1^{x_1} + x_2^{x_2})(x_1^{x_2} + x_2^{x_1})$$

- A) 180                      B) 200                      C) 196                      D) 194                      E) 16

16. Si al número 2013 se le agregan dos dígitos, uno a la izquierda y otro a la derecha, se forma un número  $N$  de seis dígitos. Por ejemplo, obtenemos el número 820139 si agregamos los dígitos 8 y 9. Si sabemos que  $N$  es múltiplo de 28, halla el menor valor que puede tener la suma de los dígitos de  $N$ .

- A) 13                      B) 14                      C) 15                      D) 6                      E) 7

17. Un entero positivo es múltiplo de 13, ¿cuál es el menor valor que podemos obtener al sumar sus dígitos?

- A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5

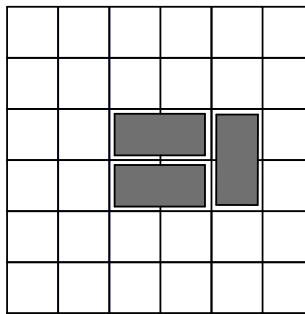
18. Sea  $D$  un punto sobre el lado  $BC$  de un triángulo  $ABC$ , tal que  $\angle BAD = \angle DAC = 30^\circ$  y  $AB + BD = AC$ . Determina la medida del ángulo  $\angle ACB$ .

- A)  $20^\circ$                       B)  $30^\circ$                       C)  $40^\circ$                       D)  $45^\circ$                       E)  $60^\circ$

19. ¿Cuál es el mayor número de cuatro dígitos distintos tal que al invertir el orden de sus dígitos resulta un cuadrado perfecto? Da como respuesta la suma de los dígitos de dicho número.

- A) 18                      B) 17                      C) 21                      D) 24                      E) 29

20. Timoteo quiere llenar un tablero de  $6 \times 6$  con 18 dominós. Hasta el momento ya ha colocado 3 dominós, como muestra la figura. ¿De cuántas maneras puede llenar el resto del tablero con 15 dominós?



*Aclaración:* Cada dominó cubre exactamente dos cuadraditos del tablero. Ningún dominó puede salirse del tablero.

- A) 494                      B) 429                      C) 519                      D) 469                      E) 559

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN