



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XVII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2021)

Tercera Etapa - Nivel 2

octubre de 2021

1. En una empresa hay 30 trabajadores, algunos de los cuales trabajan en la modalidad remota (desde casa) y otros en la modalidad presencial. Si se contratan a 15 trabajadores: 10 en la modalidad remota y 5 en la modalidad presencial, el porcentaje de trabajadores de la modalidad remota se duplicaría. Determine cuántos trabajadores en la modalidad remota hay.
2. En un hotel la numeración de sus habitaciones corresponde a un número de tres dígitos, donde el dígito de las centenas representa el piso en el que se encuentra una habitación. José se registró en dicho hotel y se dio cuenta de que el número de su habitación es múltiplo de 9, múltiplo de 5 e impar. Si se sabe que los números de las habitaciones en cada piso terminan en 01, 02, ..., 30, determine cuál es el piso más alto en el que se puede encontrar la habitación de José.
3. Abel le pide a Beto que piense en un número. Luego le pide que realice las siguientes operaciones en orden: multiplica el número por 2, suma x , divide entre 4, resta 2, vuelve a multiplicar por 2 y finalmente resta el número que pensaste inicialmente. Luego de estas operaciones, Abel le dice a Beto que el resultado fue 12. Determine el valor de x para que Abel acierte con el resultado de la operación.
4. En una prueba de atletismo la pista tiene una longitud de d metros y cada uno de los participantes corrió a rapidez constante. Se sabe que Ana le ganó a Beto por 60 metros, es decir, cuando Ana llegó a la meta, a Beto le faltaban 60 metros. Además, Beto le ganó a Carlos por 50 metros y Ana le ganó a Carlos por 100 metros. Encuentre el valor de d .
5. Aldo y Matías tienen, cada uno, un dado. Ambos lanzan sus dados y la persona que saca el número más alto gana. Si sacan el mismo número vuelven a lanzar otra vez y si el resultado vuelve a ser empate se declara a Matías ganador. La probabilidad de que Aldo gane es $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros positivos coprimos. Calcule el valor de $a + b$.
Aclaración: Cada dado tiene los números del 1 al 6.
6. Los enteros positivos $a < b < c < d < e$ forman una progresión aritmética y tres de ellos están en progresión geométrica. Calcule la cantidad de valores que puede tomar d , si sabemos que es menor que 100.

7. Sea $ABCD$ un cuadrado. Sean E un punto de la prolongación de BC (C está entre B y E) y F un punto de la prolongación de DC (C está entre D y F) tales que $\angle AEF = 90^\circ$. Si $BE = 24$ y $DF = 26$, determine el área del cuadrado $ABCD$.
8. Un profesor pide a sus alumnos que resuelvan la ecuación $x^2 - ax + b + 1 = 0$, que tiene raíces enteras positivas $x_1 < x_2$. Juan se equivoca al copiar el problema y en su lugar resuelve la ecuación $x^2 - ax + b - 1 = 0$, que tiene raíces enteras positivas $x_3 < x_4$. Si $x_1 \cdot x_4 = 5040$, determine el valor de $x_2 \cdot x_3$.
9. Un terreno tiene forma de un tablero de 8×8 . En cada casilla está enterrado un cofre y solo uno de los cofres tiene un tesoro. Cada uno de los otros cofres tiene un pañuelo azul si el tesoro está en la misma fila o columna en la que está dicho cofre, en caso contrario tiene un pañuelo rojo. ¿Cuántas casillas debemos excavar como mínimo para encontrar con certeza el tesoro?
10. Sea $N = 2^{10} \times 3^5$. Determine cuántos elementos como máximo puede tener un conjunto \mathcal{A} que cumple las siguientes propiedades a la vez:
- los elementos de \mathcal{A} son enteros positivos menores o iguales que N .
 - si a y b son elementos distintos de \mathcal{A} , entonces N es un divisor de ab (producto de a y b).