



PERÚ

Ministerio  
de Educación



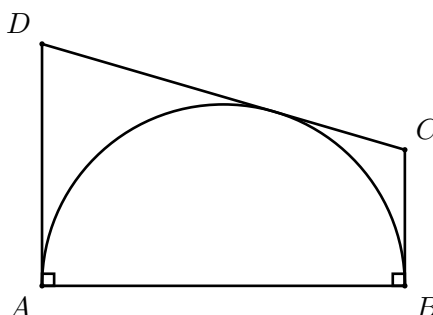
Sociedad Matemática Peruana

## XVII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2021)

### Tercera Etapa - Nivel 3

octubre de 2021

1. En una librería, si compras más de 75 lapiceros de cierta marca te ofrecen el 15 % de descuento. Inicialmente, Laura quería comprar  $N$  lapiceros de esa marca pero no conocía la promoción. Ahora, ella se ha dado cuenta de que puede comprar 12 lapiceros más, pagando lo mismo. Determine el valor de  $N$ .
2. Un trapecio  $ABCD$  de bases  $BC$  y  $AD$  cumple que  $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$ . La circunferencia de diámetro  $AB$  es tangente al lado  $CD$ . Si  $BC = 8$  y  $AD = 18$ , calcule el área del trapecio  $ABCD$ .



3. Carla compró un chocolate y una gaseosa en el supermercado. Al momento de cobrar, la cajera se equivocó al usar la calculadora de la caja y apretó la tecla  $\times$  en lugar de la tecla  $+$ . Cuando Carla calculó de forma mental lo que debía pagar obtuvo el mismo resultado que la cajera. Si Carla pagó 4,05 soles por su compra, calcule cuánto costó la gaseosa, en céntimos, si fue el artículo que más le costó.  
*Aclaración:* un sol equivale a 100 céntimos.
4. En una urna hay  $n$  bolas marcadas con los números  $1, 2, 3, \dots, n$ . Si se extraen al azar 5 bolas (a la vez), la probabilidad de que una de las bolas tenga el número 3 es  $\frac{1}{4}$ . Determine el valor de  $n$ .
5. Arturo escribe un número natural de tres dígitos que es menor que 800 y tiene todos sus dígitos impares. Luego, Boris suma al número de Arturo la suma de sus dígitos y escribe el resultado. Finalmente, Cecilia escribe la suma de los dígitos del número escrito por Boris. Determine el mayor valor que puede tomar el número escrito por Cecilia.

6. Sean  $x, y, z$  reales positivos que forman una progresión geométrica creciente, en ese orden. Si  $x - 2y + z = 2$ , calcule el menor valor posible de  $\frac{z^3}{y^2}$ .
7. Sean  $M$  y  $N$  los puntos medios de los lados  $AC$  y  $CB$  de un triángulo  $ABC$ , respectivamente. Si el punto de intersección de las medianas del triángulo  $AMN$  coincide con el punto de intersección de las alturas del triángulo  $ACB$ , calcule el valor de  $20 \sin^2 C$ .
8. En un restaurante hay una mesa circular que tiene 20 asientos igualmente espaciados. Debido al distanciamiento social, no está permitido que dos personas se sienten en asientos adyacentes, por lo que el restaurante debe marcar con un aspa los asientos que no pueden ser usados y con un círculo los que sí pueden ser usados. Si un grupo de 9 personas se va a sentar a esa mesa, determine de cuántas formas el restaurante puede asignar los 9 círculos y 11 aspás, para que se cumplan las reglas del distanciamiento social.
9. Un conjunto de  $n$  números enteros positivos tiene suma igual a 2024. Se sabe que al sumar los dígitos de cada uno de esos números se obtiene el mismo resultado. Determine el mayor valor posible de  $n$ .
10. En la pizarra están escritas las parejas:

$$(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots, (2021, 4042).$$

Un conjunto de  $k$  elementos tiene la propiedad de que cada pareja de la pizarra contiene por lo menos un elemento de ese conjunto. Determine el menor valor posible de  $k$ .