



PERÚ

Ministerio  
de Educación



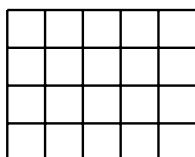
SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA  
Fundada el 29 de Marzo de 1957

## XVII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2021)

### Cuarta Fase - Nivel 2

28 de octubre de 2021

1. En un tablero de  $4 \times 5$ , como el que se muestra en la figura, se colocan los números del 1 al 20 (un número en cada casilla), en algún orden. Luego, se suman los números de cada una de las 5 columnas. Si  $A$  es la mayor suma y  $B$  es la menor suma, determine el menor valor posible de  $A + B$ .



2. Sea  $ABC$  un triángulo, la bisectriz del ángulo  $\angle CAB$  interseca a la circunferencia circunscrita del triángulo  $ABC$  en  $D$ . La recta paralela a  $AC$  que pasa por  $D$  interseca al lado  $AB$  en  $L$  y al lado  $BC$  en  $K$ . Sea  $M$  el punto medio de  $AC$ . Si  $MK = ML$ , demuestre que  $BL = KD$ .
3. Encuentre todos los polinomios  $P(x)$  de coeficientes reales tales que

$$P(x + y) + P(xy) = P(x) + P(y) + P(xy + 1),$$

para todos los números reales  $x$  y  $y$ .

4. Un entero positivo es llamado *alternante* si tiene un dígito 0, en caso tenga más de un dígito, se cumple que sus dígitos alternan entre par e impar. Por ejemplo, 3, 12, 585, 5074 y 23890 son alternantes. Demuestre que todo número entero mayor que 2 se puede expresar como la suma de exactamente tres números alternantes (no necesariamente distintos).