



PERÚ

Ministerio
de Educación



SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA
Fundada el 29 de Marzo de 1957

XVII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2021)

Cuarta Fase - Nivel 3

28 de octubre de 2021

1.
 - a) ¿Es posible colocar 6 números racionales positivos, distintos entre sí, alrededor de una circunferencia de tal modo que cada uno sea igual al producto de sus dos vecinos?
 - b) ¿Es posible colocar 8 números racionales positivos, distintos entre sí, alrededor de una circunferencia de tal modo que cada uno sea igual al producto de sus dos vecinos?
2. Los números del 1 al 25 van a ser distribuidos en un tablero de 5×5 (un número en cada casilla). Primero, Ana elige k de esos números y los ubica en algunas casillas de su elección. Luego, Enrique ubica los números restantes con el objetivo de que el producto de los números de alguna fila o columna sea igual a un cuadrado perfecto.
 - a) Muestre que si $k = 5$, entonces Ana puede asegurar que Enrique no logre su objetivo.
 - b) Muestre que si $k = 4$, entonces Ana no puede evitar que Enrique logre su objetivo.
3. Sean M , N y P puntos en los lados BC , CA y AB de un triángulo ABC , respectivamente, tales que el cuadrilátero $MCNP$ tiene una circunferencia inscrita de radio r . Si las circunferencias inscritas de los triángulos BPM y ANP también tienen radio r , pruebe que

$$AP \cdot MP = BP \cdot NP.$$

4. Sea $N \geq 3$ un número entero. Alrededor de una circunferencia se marcaron N puntos rojos que son los vértices de un polígono regular. Una *operación* consiste en escoger tres puntos rojos A , B , C tales que $BA = BC$ y, luego, borrar B . Demuestre que, luego de realizar algunas operaciones, es posible conseguir que queden exactamente dos puntos rojos.