Sociedad Matemática Peruana

XVIII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2022)

Etapa DRE - Nivel 2

28 de septiembre de 2022

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de envío del correo.
- **Queda bajo responsabilidad de los especialistas, docentes y estudiantes la no difusión de la prueba por ningún medio.**
- Teniendo en cuenta estas indicaciones nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Ana, Bruno y Cecilia son tres amigos que están jugando con dos dados. Ana lanzó los dados y obtuvo dos números cuya suma es 5. Luego, Bruno lanzó los dados y obtuvo dos números cuya suma es 10. Finalmente, Cecilia lanzó los dados y se dio cuenta que los seis números obtenidos hasta ese momento son distintos. Calcule la suma del mayor número que obtuvo Ana, el mayor número que obtuvo Bruno y el mayor número que obtuvo Cecilia.

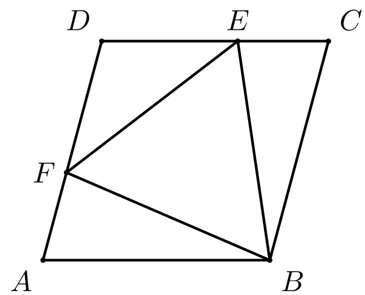
Aclaración: Cada dado tiene en sus caras los números del 1 al 6.

2. Pepe tiene en su tienda manzanas, naranjas y peras. La cantidad de naranjas es menor que el doble de la cantidad de manzanas y la cantidad de peras es mayor que el triple de la cantidad de manzanas. Si hay 55 frutas entre manzanas y naranjas, ¿cuál es la menor cantidad de peras que puede haber en la tienda de Pepe?

3. Sean a, b y c enteros positivos tales que $\text{mcd}(a, b) = 6$, $\text{mcd}(a, c) = 4$, $\text{mcm}(a, b) = 36$ y $\text{mcm}(a, c) = 60$. Encuentre el valor de $a + b + c$.

Aclaración: Si p y q son enteros positivos, $\text{mcd}(p, q)$ denota al máximo común divisor de p y q. Además, $\text{mcm}(p, q)$ denota al mínimo común múltiplo de p y q.

4. En la figura mostrada, $ABCD$ es un rombo y BEF es un triángulo equilátero de tal modo que $AB = BF$. Calcule el valor de x, si $\angle DAB = x°$.



Aclaración: Un rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales.

5. Humberto y su hijo Raúl cumplen años el mismo día. En su próximo cumpleaños, que será en el año 2023, ocurrirá una propiedad interesante: la edad de Humberto será igual a la suma de los dígitos del año en que nació Humberto y la edad de Raúl será igual a la suma de los dígitos del año en que nació Raúl. Calcule la suma de las edades que tendrán Humberto y su hijo en su próximo cumpleaños.

6. Sean a, b y c números reales, entre los cuales no hay dos iguales, tales que

$$(a + b)(a + c) = b,$$
$$(b + c)(b + a) = c,$$
$$(c + a)(c + b) = a.$$

Encuentre el valor de $64abc$.

7. Sea ABC un triángulo rectángulo, recto en A. Ubicamos dos puntos P y Q sobre la hipotenusa BC de tal modo que $BP = PQ = QC$. Si $AP = 58$ y $AQ = 59$, encuentre la longitud de la hipotenusa BC.

8. Hugo tiene 18 tarjetas de 6 colores distintos en una caja, 3 de cada color. Él debe elegir al azar 3 tarjetas de la caja. Si la probabilidad de que dichas tarjetas sean de colores distintos es $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros positivos coprimos, calcule el valor de $a + b$.

9. Encuentre la cantidad de parejas de números enteros (x, y), con $1 < x < y$, tales que el siguiente número es entero:

$$\frac{x}{y} + \frac{2}{x} - \frac{1}{xy}.$$

10. En 1000 tarjetas están distribuidos los números del 0 al 999, un número en cada tarjeta. Se escoge una de esas tarjetas (que no es 0 ni 1) y se coloca en el centro de una circunferencia, mientras que las otras se colocan alrededor de la circunferencia de tal manera que la suma de cualesquiera k números consecutivos en la circunferencia sea divisible por el número colocado en el centro. Determine para cuántos valores de k esta situación es posible, donde $2 \leq k \leq 999$.