- Esta es una prueba de 15 preguntas. Todas las respuestas son números enteros entre 000 y 999, inclusive (para cada problema debes marcar siempre tres dígitos).
- Cada respuesta correcta vale 1 punto; cada respuesta incorrecta o dejada en blanco vale 0 puntos.
- Esta prueba tiene una duración de 3 horas.

Problema 1. Cinco hombres y nueve mujeres se sientan aleatoriamente alrededor de una circunferencia, igualmente espaciados. La probabilidad de que cada hombre esté sentado diametralmente opuesto a una mujer es $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos coprimos. Calcule el valor de $m+n$.

Problema 2. Los números reales positivos $b \neq 1$ y n satisfacen las ecuaciones

$$\sqrt{\log_b n} = \log_b \sqrt{n} \qquad \text{y} \qquad b \cdot \log_b n = \log_b (bn).$$

El valor de n es $\frac{j}{k}$, donde j y k son enteros positivos coprimos. Halle $j+k$.

Problema 3. Un plano contiene 40 rectas, entre las cuales no hay 2 paralelas. Suponga que hay 3 puntos donde exactamente 3 rectas se intersecan, 4 puntos donde exactamente 4 rectas se intersecan, 5 puntos donde exactamente 5 rectas se intersecan, 6 puntos donde exactamente 6 rectas se intersecan, y no hay puntos donde se intersecan más de 6 rectas. Halle el número de puntos donde exactamente dos rectas se intersecan.

Problema 4. La suma de todos los enteros positivos m tales que $\dfrac{13!}{m}$ es un cuadrado perfecto se puede escribir como $2^a 3^b 5^c 7^d 11^e 13^f$, donde a, b, c, d, e y f son enteros positivos. Halle $a+b+c+d+e+f$.

Problema 5. Sea P un punto en la circunferencia circunscrita del cuadrado $ABCD$ que satisface $PA \cdot PC = 56$ y $PB \cdot PD = 90$. Halle el área de $ABCD$.

Problema 6. Alicia sabe que 3 cartas rojas y 3 cartas negras serán reveladas a ella, una por una, en un orden aleatorio. Antes de que cada carta sea revelada Alicia debe adivinar su color. Si Alicia juega óptimamente, el número esperado de cartas que adivine correctamente es $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos coprimos. Halle $m+n$.

Problema 7. Un entero positivo n es llamado *extra-distinto* si los restos cuando n es dividido por 2, 3, 4, 5 y 6 son distintos. Halle el número de enteros positivos extra-distintos menores que 1000.

Problema 8. El rombo $ABCD$ cumple que $\angle BAD < 90^\circ$. Existe un punto P en la circunferencia inscrita del rombo tal que las distancias desde P a las rectas DA, AB y BC son 9, 5 y 16, respectivamente. Halle el perímetro de $ABCD$.

Problema 9. Halle el número de polinomios cúbicos $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son enteros que pertenecen al conjunto $\{-20, -19, -18, \ldots, 18, 19, 20\}$, para los cuales existe un único entero $m \neq 2$ tal que $p(m) = p(2)$.

Problema 10. Existe un único entero positivo a tal que la suma

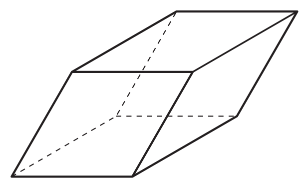
$$U = \sum_{n=1}^{2023} \left\lfloor \frac{n^2 - na}{5} \right\rfloor$$

es un número entero mayor que -1000 y menor que 1000. Para ese único a, halle $a + U$. Aquí $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero que es menor o igual que x.

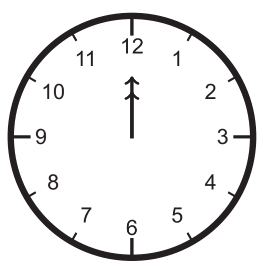
Problema 11. Halle el número de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ que contienen exactamente una pareja de enteros consecutivos. Ejemplos de tales subconjuntos son $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 5\}$ y $\{1, 3, \mathbf{6}, \mathbf{7}, 10\}$.

Problema 12. Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero de lado 55. Los puntos D, E y F están en $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, tales que $BD = 7$, $CE = 30$ y $AF = 40$. El punto P está en el interior de $\triangle ABC$ tal que $\angle AEP = \angle BFP = \angle CDP$. Halle $\tan^2(\angle AEP)$.

Problema 13. Cada cara de dos paralelepípedos no congruentes es un rombo cuyas diagonales tienen longitudes $\sqrt{21}$ y $\sqrt{31}$. Si dividimos el volumen del mayor paralelepípedo entre el volumen del menor obtenemos $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos coprimos. Halle $m + n$. Un paralelepípedo es un sólido que tiene seis caras que son paralelogramos como el que se muestra a continuación.



Problema 14. El siguiente reloj analógico tiene dos manecillas que pueden moverse independientemente de la otra.



Al inicio, ambas manecillas apuntan al número 12. El reloj realiza una secuencia de movimientos de las manecillas de tal manera que en cada movimiento una de las dos manecillas se mueve en sentido horario al siguiente número mientras que la otra manecilla no se mueve. Sea N el número de secuencias de 144 movimientos de las manecillas tales que durante la secuencia, cualquier posible posición de las manecillas aparece exactamente una vez y, al final de los 144 movimientos las manecillas regresan a la posición inicial. Halle el resto de dividir N entre 1000.

Problema 15. Halle el mayor número primo $p < 1000$ para el cual existe un número complejo z que cumple las siguientes condiciones

- la parte real de z y la parte imaginaria de z son ambas enteras,
- $|z| = \sqrt{p}$,
- existe un triángulo cuyos lados miden p, la parte real de z^3 y la parte imaginaria de z^3.