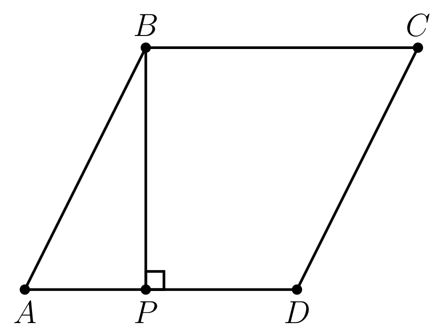
Problema 1.
Defina $x \diamond y$ como $|x - y|$ para todos los números reales x y y. Calcule el valor de:

$$(1 \diamond (2 \diamond 3)) - ((1 \diamond 2) \diamond 3).$$

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2

Problema 2.
En el rombo $ABCD$, el punto P yace sobre el segmento $\overline{AD}$, de modo que $\overline{BP} \perp \overline{AD}$, $AP = 3$ y $PD = 2$. ¿Cuál es el área de $ABCD$? (Nota: La figura no está dibujada a escala).



(A) $3\sqrt{5}$ **(B)** 10 **(C)** $6\sqrt{5}$ **(D)** 20 **(E)** 25

Problema 3.
¿Cuántos enteros positivos de tres dígitos tienen un número impar de dígitos pares?

(A) 150 **(B)** 250 **(C)** 350 **(D)** 450 **(E)** 550

Problema 4.
Un burro sufre un ataque de hipo; el primero hipo ocurre a las 4:00 de la tarde. Si el burro tiene hipo regularmente cada 5 segundos, ¿a qué hora tendrá el hipo número 700 ?

(A) 15 segundos después de las 4:58 **(B)** 20 segundos después de las 4:58
(C) 25 segundos después de las 4:58 **(D)** 30 segundos después de las 4:58
(E) 35 segundos después de las 4:58

Problema 5.
Calcule el valor de

$$\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7^2}\right)}}.$$

(A) $\sqrt{3}$ **(B)** 2 **(C)** $\sqrt{15}$ **(D)** 4 **(E)** $\sqrt{105}$

Problema 6.
¿Cuántos de los primeros diez números en la sucesión 121, 11211, 1112111, … son números primos?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Problema 7.
¿Para cuántos valores de la constante k tendrá el polinomio $x^2 + kx + 36$ dos raíces enteras distintas?

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 14 **(E)** 16

Problema 8.
Considere los siguientes 100 conjuntos de 10 elementos cada uno:

$$\begin{aligned}&\{1, 2, 3, \ldots, 10\},\\ &\{11, 12, 13, \ldots, 20\},\\ &\{21, 22, 23, \ldots, 30\},\\ &\vdots\\ &\{991, 992, 993, \ldots, 1000\}.\end{aligned}$$

¿Cuántos de estos conjuntos contienen exactamente dos múltiplos de 7 ?

(A) 40 **(B)** 42 **(C)** 43 **(D)** 49 **(E)** 50

Problema 9.
La suma

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{2021}{2022!}$$

se puede expresar como $a - \frac{1}{b!}$, donde a y b son enteros positivos. ¿Cuánto es $a + b$?

(A) 2020 **(B)** 2021 **(C)** 2022 **(D)** 2023 **(E)** 2024

Problema 10.
Camila anota cinco enteros positivos. La única moda de estos enteros es 2 más que su mediana, y la mediana es 2 más que su media aritmética. ¿Cuál es el valor mínimo posible de la moda?

(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 9 **(D)** 11 **(E)** 13

Problema 11.
Todas las escuelas secundarias de un distrito escolar están vendiendo camisetas para recaudar fondos. ¿Cuál de las siguientes opciones es el equivalente lógico de la afirmación: "Ninguna escuela más grande que Euclid HS vendió más camisetas que Euclid HS"?

(A) Todas las escuelas más pequeñas que Euclid HS vendieron menos camisetas que Euclid HS.

(B) Ninguna escuela que haya vendido más camisetas que Euclid HS es más grande que Euclid HS.

(C) Todas las escuelas más grandes que Euclid HS vendieron menos camisetas que Euclid HS.

(D) Todas las escuelas que vendieron menos camisetas que Euclid HS son más pequeñas que Euclid HS.

(E) Todas las escuelas más pequeñas que Euclid HS vendieron más camisetas que Euclid HS.

Problema 12.
Se lanza n veces un par de dados de 6 caras. ¿Cuál es el valor mínimo de n de modo que la probabilidad de que la suma de los dos números obtenidos en un lanzamiento sea 7 al menos una vez, sea mayor que $\frac{1}{2}$?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

Problema 13.
La diferencia positiva entre dos números primos es igual a 2, y la diferencia positiva entre los cubos de esos dos números primos es igual a 31106. ¿Cuál es la suma de los dígitos del menor número primo que es mayor que esos dos números primos?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 11 **(D)** 13 **(E)** 16

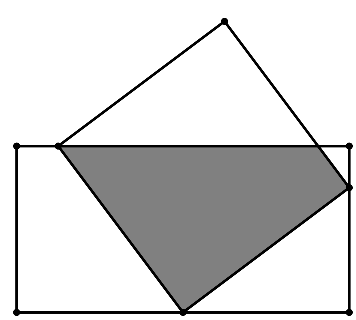
Problema 14.
Sea S un subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 25\}$ tal que la suma de dos elementos cualesquiera de S (no necesariamente distintos) nunca es un elemento de S. ¿Cuál es la cantidad máxima de elementos que puede contener S?

(A) 12 **(B)** 13 **(C)** 14 **(D)** 15 **(E)** 16

Problema 15.
Supongamos que S_n es la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética que tiene una diferencia común de 2. Si el cociente $\dfrac{S_{3n}}{S_n}$ no depende de n, ¿cuál es el valor de S_{20}?

(A) 340 **(B)** 360 **(C)** 380 **(D)** 400 **(E)** 420

Problema 16.
El siguiente diagrama muestra un rectángulo de lados de longitud 4 y 8, y un cuadrado de lado de longitud 5. Tal como se puede ver, tres vértices del cuadrado yacen en tres lados diferentes del rectángulo. ¿Cuál es el área de la región dentro del cuadrado y del rectángulo?



(A) $15\frac{1}{8}$ **(B)** $15\frac{3}{8}$ **(C)** $15\frac{1}{2}$ **(D)** $15\frac{5}{8}$ **(E)** $15\frac{7}{8}$

Problema 17.
Uno de los siguientes números no es divisible por ningún número primo menor que 10. ¿Cuál es?

(A) $2^{606} - 1$ **(B)** $2^{606} + 1$ **(C)** $2^{607} - 1$ **(D)** $2^{607} + 1$ **(E)** $2^{607} + 3^{607}$

Problema 18.
Considere los sistemas de tres ecuaciones lineales con incógnitas x, y y z,

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0, \end{aligned}$$

donde cada uno de los coeficientes es 0 o 1, y el sistema tiene una solución distinta a la solución nula $x = y = z = 0$. Por ejemplo, un sistema de este tipo es

$$\begin{aligned} 1x + 1y + 0z &= 0 \\ 0x + 1y + 1z &= 0 \\ 0x + 0y + 0z &= 0, \end{aligned}$$

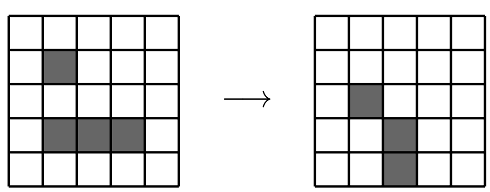
que tiene una solución no nula $(x, y, z) = (1, -1, 1)$. ¿Cuántos sistemas de ecuaciones de este tipo hay? (Las ecuaciones en un sistema no tienen que ser distintas, y dos sistemas que contienen las mismas ecuaciones en un orden diferente se consideran diferentes).

(A) 302 **(B)** 338 **(C)** 340 **(D)** 343 **(E)** 344

Problema 19.
Cada cuadrado en una cuadrícula de 5×5 está lleno o vacío, y tiene hasta ocho cuadrados adyacentes colindantes que comparten un lado o una esquina. La cuadrícula se transforma de acuerdo con las siguientes reglas:

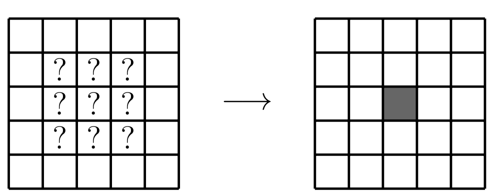
- Todo cuadrado lleno con dos o tres cuadrados colindantes llenos permanecerá igual.
- Todo cuadrado vacío con exactamente tres cuadrados colindantes llenos pasará a estar lleno.
- Los demás cuadrados permanecerán vacíos o se vaciarán.

En la figura a continuación se muestra una transformación de ejemplo.



Inicial Transformada

Supongamos que una cuadrícula de 5×5 tiene un borde de cuadrados vacíos que rodea a una subcuadrícula de 3×3. ¿Cuántas configuraciones iniciales generarán una cuadrícula transformada con un solo cuadrado lleno en el centro después de una sola transformación? (Las rotaciones y reflexiones de la misma configuración se consideran diferentes).



Inicial Transformada

(A) 14 **(B)** 18 **(C)** 22 **(D)** 26 **(E)** 30

Problema 20.
Sea $ABCD$ un rombo con $\angle ADC = 46^\circ$. Sea E el punto medio de $\overline{CD}$ y F un punto en $\overline{BE}$ de modo tal que $\overline{AF}$ es perpendicular a $\overline{BE}$. ¿Cuál es la medida en grados de $\angle BFC$?

(A) 110 **(B)** 111 **(C)** 112 **(D)** 113 **(E)** 114

Problema 21.
Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes racionales de modo que, cuando $P(x)$ se divide por el polinomio x^2+x+1, el resto es $x+2$, y cuando $P(x)$ se divide por el polinomio x^2+1, el resto es $2x+1$. Hay un solo polinomio del grado más bajo con estas dos propiedades. ¿Cuál es la suma de los cuadrados de los coeficientes de ese polinomio?

(A) 10 **(B)** 13 **(C)** 19 **(D)** 20 **(E)** 23

Problema 22.
Sea S el conjunto de todos los círculos tangentes a cada uno de los tres círculos en el plano cartesiano, cuyas ecuaciones son $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=64$ y $(x-5)^2+y^2=3$. ¿Cuál es la suma de las áreas de todos los círculos en S?

(A) 48π **(B)** 68π **(C)** 96π **(D)** 102π **(E)** 136π

Problema 23.
La hormiga Amelia comienza en el punto 0 de la recta numérica y avanza de la siguiente manera. Para $n = 1, 2, 3$, Amelia elige una duración de tiempo t_n y un incremento x_n de forma independiente y uniformemente aleatoria en el intervalo $(0, 1)$. Durante el paso n del proceso, Amelia se mueve x_n unidades en la dirección positiva y utiliza t_n minutos. Si el tiempo total transcurrido es más de 1 minuto durante el paso n, se detiene al final de ese paso; de lo contrario, continúa con el siguiente, avanzando como máximo 3 pasos en total. ¿Cuál es la probabilidad de que la posición de Amelia sea mayor a 1 cuando se detenga?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{4}$ **(E)** $\frac{5}{6}$

Problema 24.
Considere las funciones f tales que $|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$ para todos los números reales x y y. De todas las funciones de este tipo que también satisfacen la ecuación $f(300) = f(900)$, determine el mayor valor posible de

$$f(f(800)) - f(f(400)).$$

(A) 25 **(B)** 50 **(C)** 100 **(D)** 150 **(E)** 200

Problema 25.
Sea $x_0, x_1, x_2, \ldots$ una sucesión de números, donde cada x_k es igual a 0 o a 1. Para cada entero positivo n, defina

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k 2^k.$$

Asuma que $7S_n \equiv 1 \pmod{2^n}$ para todo $n \geq 1$. Calcule el valor de la suma

$$x_{2019} + 2x_{2020} + 4x_{2021} + 8x_{2022}.$$

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 12 **(D)** 14 **(E)** 15