Problema 1.
La señora Jones vierte jugo de naranja en cuatro vasos idénticos para sus cuatro hijos. Ella consigue llenar tres vasos de forma completa, pero el jugo restante solo le alcanza para llenar el cuarto vaso hasta $\frac{1}{3}$ de su capacidad. ¿Qué fracción de un vaso debe vertir la señora Jones de cada uno de los primeros tres vasos en el cuarto vaso para conseguir que los cuatro vasos tengan la misma cantidad de jugo?

(A) $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{2}{9}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

Problema 2.
Carlos fue a una tienda deportiva para comprar un par de zapatillas. Las zapatillas están de oferta: los precios tienen un 20 % de descuento en cada par de zapatillas. Carlos también sabe que tiene que pagar un 7,5 % de impuestos sobre el precio descontado. Él tiene \$43. ¿Cuál es el precio original (antes del descuento) de las zapatillas más caras que se puede permitir pagar?

(A) \$46 **(B)** \$47 **(C)** \$48 **(D)** \$49 **(E)** \$50

Problema 3.
Un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 está inscrito en un círculo A y un triángulo rectángulo de lados 5, 12 y 13 está inscrito en un círculo B. ¿En qué razón están el área del círculo A y el área del círculo B?

(A) $\frac{1}{9}$ **(B)** $\frac{25}{169}$ **(C)** $\frac{4}{25}$ **(D)** $\frac{1}{5}$ **(E)** $\frac{9}{25}$

Problema 4.
El pincel de Jackson puede pintar una franja estrecha de 6,5 milímetros de ancho. Jackson tiene suficiente pintura para pintar una franja de 25 metros de largo. ¿Cuántos centímetros cuadrados de papel puede cubrir Jackson con esta cantidad de pintura?

(A) 162,5 **(B)** 1625 **(C)** 16250 **(D)** 162500 **(E)** 1625000

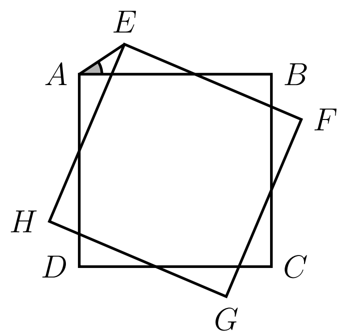
Problema 5.
Maddy y Lara ven una lista de números escritos en una pizarra. Maddy suma 3 a cada uno de los números en la lista y obtiene que la suma de sus nuevos números es igual a 45. Lara multiplica por 3 a cada uno de los números de la lista original y encuentra que la suma de sus nuevos números es también igual a 45. ¿Cuántos números están escritos en la pizarra?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10

Problema 6.
Sea $L_1 = 1,\ L_2 = 3$ y $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ para todo $n \geq 1$. ¿Cuántos términos en la secuencia $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_{2023}$ son pares?

(A) 673 **(B)** 674 **(C)** 675 **(D)** 1010 **(E)** 1011

Problema 7.
El cuadrado $ABCD$ es rotado 20° en sentido horario alrededor de su centro para obtener el cuadrado $EFGH$, como se muestra abajo. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo $\angle EAB$?



(A) 20° **(B)** 24° **(C)** 30° **(D)** 32° **(E)** 35°

Problema 8.
¿Cuál es es el dígito de las unidades del número $2022^{2023} + 2023^{2022}$?

(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 9

Problema 9.
Los números 16 y 25 son una pareja de cuadrados perfectos positivos consecutivos cuya diferencia es igual a 9. ¿Cuántas parejas de cuadrados perfectos positivos consecutivos tienen una diferencia que es menor o igual a 2023 ?

(A) 674 **(B)** 1010 **(C)** 1011 **(D)** 2017 **(E)** 2019

Problema 10.
Estás jugando un juego. Un rectángulo de 2×1 cubre dos casillas adyacentes (orientadas de forma horizontal o vertical) de un tablero de 3×3, pero no sabes cuales casillas fueron cubiertas. Tu objetivo es encontrar al menos una de las casillas cubiertas por el rectángulo. Un "turno" consiste en que eliges una casilla, después de esto te informan si la casilla elegida está cubierta por el rectángulo escondido. ¿Cuál es el mínimo número de turnos que necesitas para asegurar que al menos una de tus casillas elegidas está cubierta por el rectángulo?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 8

Problema 11.
Suzanne fue al banco y retiró \$800. El cajero le entregó esta cantidad usando billetes de \$20, \$50 y \$100, con al menos uno de cada denominación. ¿Cuántas colecciones diferentes de billetes pudo recibir Suzanne?

(A) 21 **(B)** 28 **(C)** 32 **(D)** 36 **(E)** 45

Problema 12.
Las raíces del polinomio

$$P(x) = (x-1)^1(x-2)^2(x-3)^3 \cdots (x-10)^{10}$$

son retiradas de la recta real, el conjunto restante es igual a la unión de 11 intervalos abiertos disjuntos. ¿En cuántos de estos intervalos se cumple que $P(x)$ es positivo?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

Problema 13.
Calcule el área de la región en el plano cartesiano definida por

$$||x|-1|+||y|-1|\leq 1.$$

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 8 **(D)** 12 **(E)** 15

Problema 14.
Determine cuántos pares ordenados de números enteros (m,n) satisfacen la ecuación

$$m^2+mn+n^2=m^2n^2.$$

(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

Problema 15.
¿Cuál es el menor entero positivo m para el cual $m\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!\cdots 16!$ es un cuadrado perfecto?

(A) 30 **(B)** 70 **(C)** 1001 **(D)** 1430 **(E)** 30030

Problema 16.
Defina un *upno* como un entero positivo de 2 o más dígitos en el cual se cumple que estos dígitos están en orden estrictamente creciente cuando son leídos de izquierda a derecha. De forma similar, defina un *downno* como un entero positivo de 2 o más dígitos en el cual se cumple que estos dígitos están en orden estrictamente decreciente cuando son leídos de izquierda a derecha. Por ejemplo, 258 es un upno y 8620 es un downno. Sea U la cantidad total de upnos y D la cantidad total de downnos. ¿Cuál es el valor de $|U-D|$?

(A) 0 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 511 **(E)** 512

Problema 17.
Una caja rectangular $\mathcal{P}$ tiene aristas de longitudes distintas a, b y c. La suma de las longitudes de las 12 aristas de $\mathcal{P}$ es 13, la suma de las áreas de las 6 caras de $\mathcal{P}$ es $\frac{11}{2}$ y el volumen de $\mathcal{P}$ es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la longitud de la mayor diagonal interior que conecta dos vértices de $\mathcal{P}$?

(A) $\frac{3}{8}$ **(B)** $\frac{9}{8}$ **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** 2 **(E)** $\frac{9}{4}$

Problema 18.
Sean a, b y c enteros positivos tales que

$$\frac{a}{14}+\frac{b}{15}=\frac{c}{210}.$$

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son necesariamente ciertas?

I. Si $\operatorname{mcd}(a,14)=1$ o $\operatorname{mcd}(b,15)=1$ o ambos, entonces $\operatorname{mcd}(c,210)=1$.

II. Si $\operatorname{mcd}(c,210)=1$, entonces $\operatorname{mcd}(a,14)=1$ o $\operatorname{mcd}(b,15)=1$ o ambos.

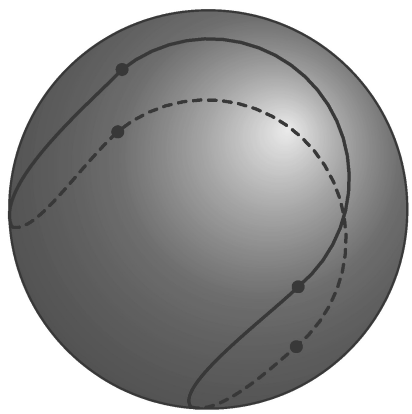
III. $\operatorname{mcd}(c,210)=1$ si y solo si $\operatorname{mcd}(a,14)=1$ y $\operatorname{mcd}(b,15)=1$.

(A) solo I **(B)** solo III **(C)** solo I y II **(D)** solo II y III **(E)** I, II y III

Problema 19.
Sonya la rana elige un punto uniformemente al azar en el cuadrado $[0,6] \times [0,6]$ del plano cartesiano y salta a dicho punto. Ella entonces elige uniformemente al azar una distancia en el intervalo $[0,1]$ y elige uniformemente al azar una de las direcciones $\{\text{norte}, \text{este}, \text{sur}, \text{oeste}\}$. Todas sus elecciones son independientes. Ella ahora salta la distancia elegida en la dirección elegida. ¿Cuál es la probabilidad de que ella aterrice afuera del cuadrado?

(A) $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{1}{10}$ **(C)** $\frac{1}{9}$ **(D)** $\frac{1}{6}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

Problema 20.
Cuatro semicircunferencias congruentes están dibujadas en la superficie de una esfera de radio 2, como se muestra, creando una curva cerrada que divide a esta superficie en dos regiones congruentes. La longitud de la curva es $\pi\sqrt{n}$. ¿Cuál es el valor de n?



(A) 12 **(B)** 27 **(C)** 32 **(D)** 36 **(E)** 48

Problema 21.
Cada una de 2023 pelotas es puesta al azar en alguno de 3 recipientes. ¿Cuál de los siguientes números está más cerca de la probabilidad de que cada uno de los recipientes contenga una cantidad impar de pelotas?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{10}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

Problema 22.
¿Cuántos valores distintos de x satisfacen la ecuación $\lfloor x \rfloor^2 - 3x + 2 = 0$, donde $\lfloor x \rfloor$ es igual al mayor entero que es menor o igual a x?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** un número infinito

Problema 23.
Una progresión aritmética de enteros positivos tiene $n \geq 3$ términos, con término inicial a y diferencia en común igual a $d > 1$. Carl escribe de forma correcta todos los términos de esta progresión, excepto uno de ellos, que difiere en 1 del término correcto. La suma de los números que escribió Carl es igual a 222. ¿Cuál es el valor de $a + d + n$?

(A) 20 **(B)** 22 **(C)** 24 **(D)** 26 **(E)** 28

Problema 24.
¿Cuál es la longitud del borde de la región en el plano xy que consiste de los puntos de la forma $(2u - 3w, v + 4w)$, donde $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ y $0 \leq w \leq 1$?

(A) 13 **(B)** 15 **(C)** 16 **(D)** $10\sqrt{3}$ **(E)** 18

Problema 25.
Un pentágono regular de área $1 + \sqrt{5}$ fue impreso en una hoja de papel y luego recortado. A continuación doblamos la hoja pentagonal de tal forma que uno de los vértices coincida con el centro del pentágono. Luego de realizar esto con cada uno de los 5 vértices, se forma un pentágono menor con las líneas de los dobleces. ¿Cuál es el área de este nuevo pentágono?

(A) $\sqrt{5} - 1$ **(B)** $8 - 3\sqrt{5}$ **(C)** $\dfrac{2 + \sqrt{5}}{3}$ **(D)** $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ **(E)** $4 - \sqrt{5}$