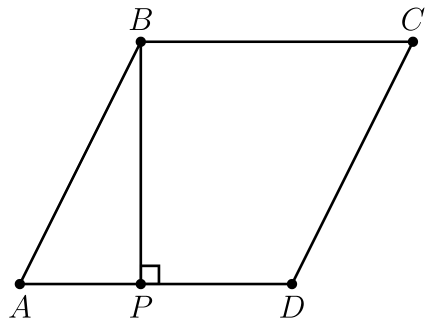
Problema 1.
Defina $x \diamond y$ como $|x-y|$ para todos los números reales x y y. Calcule el valor de:

$$(1 \diamond (2 \diamond 3)) - ((1 \diamond 2) \diamond 3).$$

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2

Problema 2.
En el rombo $ABCD$, el punto P yace sobre el segmento $\overline{AD}$, de modo que $\overline{BP} \perp \overline{AD}$, $AP = 3$ y $PD = 2$. ¿Cuál es el área de $ABCD$? (Nota: La figura no está dibujada a escala).



(A) $3\sqrt{5}$ **(B)** 10 **(C)** $6\sqrt{5}$ **(D)** 20 **(E)** 25

Problema 3.
¿Cuántos de los primeros diez números en la sucesión 121, 11211, 1112111, ... son números primos?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Problema 4.
¿Para cuántos valores de la constante k tendrá el polinomio $x^2 + kx + 36$ dos raíces enteras distintas?

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 14 **(E)** 16

Problema 5.
El punto $(-1,-2)$ es rotado 270° en sentido antihorario alrededor del punto $(3,1)$. ¿Cuáles son las coordenadas de su nueva posición?

(A) $(-3,4)$ **(B)** $(0,5)$ **(C)** $(2,-1)$ **(D)** $(4,3)$ **(E)** $(6,-3)$

Problema 6.
Considere los siguientes 100 conjuntos de 10 elementos cada uno:

$$\begin{aligned}
&\{1,2,3,\ldots,10\},\\
&\{11,12,13,\ldots,20\},\\
&\{21,22,23,\ldots,30\},\\
&\vdots\\
&\{991,992,993,\ldots,1000\}.
\end{aligned}$$

¿Cuántos de estos conjuntos contienen exactamente dos múltiplos de 7 ?

(A) 40 **(B)** 42 **(C)** 43 **(D)** 49 **(E)** 50

Problema 7.
Camila anota cinco enteros positivos. La única moda de estos enteros es 2 más que su mediana, y la mediana es 2 más que su media aritmética. ¿Cuál es el valor mínimo posible de la moda?

(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 9 **(D)** 11 **(E)** 13

Problema 8.
¿Cuál es el gráfico de $y^4 + 1 = x^4 + 2y^2$ en el plano cartesiano?

(A) dos parábolas que se intersecan **(B)** dos parábolas que no se intersecan
(C) dos circunferencias que se intersecan **(D)** una circunferencia y una hipérbola
(E) una circunferencia y dos parábolas

Problema 9.
La sucesión $a_0, a_1, a_2, \dots$ es una progresión aritmética estrictamente creciente de enteros positivos, de modo que

$$2^{a_7} = 2^{27} \cdot a_7.$$

¿Cuál es el valor mínimo posible de a_2 ?

(A) 8 **(B)** 12 **(C)** 16 **(D)** 17 **(E)** 22

Problema 10.
El hexágono regular $ABCDEF$ tiene lados de longitud 2. Sea G el punto medio de $\overline{AB}$, y sea H el punto medio de $\overline{DE}$. ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero $GCHF$?

(A) $4\sqrt{3}$ **(B)** 8 **(C)** $4\sqrt{5}$ **(D)** $4\sqrt{7}$ **(E)** 12

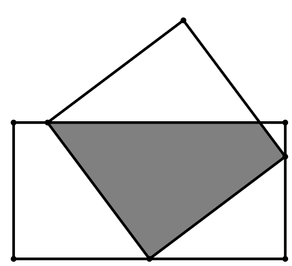
Problema 11.
Sea $f(n) = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$, donde $i = \sqrt{-1}$. ¿Cuál es el valor de $f(2022)$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** $\sqrt{3}$ **(E)** 2

Problema 12.
Kayla lanza cuatro dados de 6 caras. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los números que obtiene Kayla sea mayor que 4 y al menos dos de los números que ella obtiene sean mayores que 2 ?

(A) $\dfrac{2}{3}$ **(B)** $\dfrac{19}{27}$ **(C)** $\dfrac{59}{81}$ **(D)** $\dfrac{61}{81}$ **(E)** $\dfrac{7}{9}$

Problema 13.
El siguiente diagrama muestra un rectángulo de lados de longitud 4 y 8, y un cuadrado de lado de longitud 5. Tal como se puede ver, tres vértices del cuadrado yacen en tres lados diferentes del rectángulo. ¿Cuál es el área de la región dentro del cuadrado y del rectángulo?



(A) $15\frac{1}{8}$ **(B)** $15\frac{3}{8}$ **(C)** $15\frac{1}{2}$ **(D)** $15\frac{5}{8}$ **(E)** $15\frac{7}{8}$

Problema 14.
El gráfico de $y = x^2 + 2x - 15$ interseca al eje x en los puntos A y C, y al eje y en el punto B. ¿Cuál es el valor de $\tan(\angle ABC)$?

(A) $\frac{1}{7}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{4}{7}$

Problema 15.
Uno de los siguientes números no es divisible por ningún número primo menor que 10. ¿Cuál es?

(A) $2^{606} - 1$ **(B)** $2^{606} + 1$ **(C)** $2^{607} - 1$ **(D)** $2^{607} + 1$ **(E)** $2^{607} + 3^{607}$

Problema 16.
Suponga que x y y son números reales positivos tales que

$$x^y = 2^{64} \qquad \text{y} \qquad (\log_2 x)^{\log_2 y} = 2^7.$$

¿Cuál es el máximo valor posible de $\log_2 y$?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** $3 + \sqrt{2}$ **(D)** $4 + \sqrt{3}$ **(E)** 7

Problema 17.
¿Cuántos arreglos de números de 4×4 hay cuyas entradas sean 0 o 1, tales que las sumas de las filas (la suma de las entradas en cada fila) sean 1, 2, 3 y 4, en algún orden, y las sumas de las columnas (la suma de las entradas de cada columna) también sean 1, 2, 3 y 4, en algún orden? Por ejemplo, el arreglo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

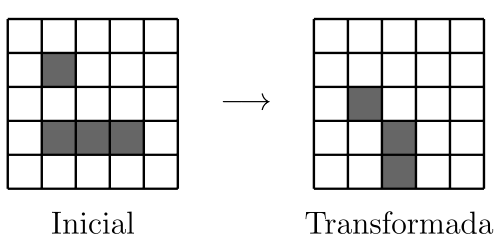
cumple con la condición.

(A) 144 **(B)** 240 **(C)** 336 **(D)** 576 **(E)** 624

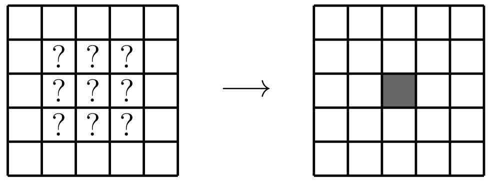
Problema 18.
Cada cuadrado en una cuadrícula de 5×5 está lleno o vacío, y tiene hasta ocho cuadrados adyacentes colindantes que comparten un lado o una esquina. La cuadrícula se transforma de acuerdo con las siguientes reglas:

- Todo cuadrado lleno con dos o tres cuadrados colindantes llenos permanecerá igual.
- Todo cuadrado vacío con exactamente tres cuadrados colindantes llenos pasará a estar lleno.
- Los demás cuadrados permanecerán vacíos o se vaciarán.

En la figura a continuación se muestra una transformación de ejemplo.



Supongamos que una cuadrícula de 5×5 tiene un borde de cuadrados vacíos que rodea a una subcuadrícula de 3×3. ¿Cuántas configuraciones iniciales generarán una cuadrícula transformada con un solo cuadrado lleno en el centro después de una sola transformación? (Las rotaciones y reflexiones de la misma configuración se consideran diferentes).



Inicial Transformada

(A) 14 **(B)** 18 **(C)** 22 **(D)** 26 **(E)** 30

Problema 19.
En el triángulo ABC, las medianas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ se intersecan en G y el triángulo AGE es equilátero. Entonces $\cos(C)$ se puede expresar como $\frac{m}{n} \cdot \sqrt{p}$, donde m y n son enteros positivos primos entre sí y p es un entero positivo que no es divisible por el cuadrado de ningún primo. ¿Cuánto es $m+n+p$?

(A) 44 **(B)** 48 **(C)** 52 **(D)** 56 **(E)** 60

Problema 20.
Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes racionales de modo que, cuando $P(x)$ se divide por el polinomio x^2+x+1, el resto es $x+2$, y cuando $P(x)$ se divide por el polinomio x^2+1, el resto es $2x+1$. Hay un solo polinomio del grado más bajo con estas dos propiedades. ¿Cuál es la suma de los cuadrados de los coeficientes de ese polinomio?

(A) 10 **(B)** 13 **(C)** 19 **(D)** 20 **(E)** 23

Problema 21.
Sea S el conjunto de todos los círculos tangentes a cada uno de los tres círculos en el plano cartesiano, cuyas ecuaciones son $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=64$ y $(x-5)^2+y^2=3$. ¿Cuál es la suma de las áreas de todos los círculos en S?

(A) 48π **(B)** 68π **(C)** 96π **(D)** 102π **(E)** 136π

Problema 22.
La hormiga Amelia comienza en el punto 0 de la recta numérica y avanza de la siguiente manera. Para $n = 1, 2, 3$, Amelia elige una duración de tiempo t_n y un incremento x_n de forma independiente y uniformemente aleatoria en el intervalo $(0,1)$. Durante el paso n del proceso, Amelia se mueve x_n unidades en la dirección positiva y utiliza t_n minutos. Si el tiempo total transcurrido es más de 1 minuto durante el paso n, se detiene al final de ese paso; de lo contrario, continúa con el siguiente, avanzando como máximo 3 pasos en total. ¿Cuál es la probabilidad de que la posición de Amelia sea mayor a 1 cuando se detenga?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{4}$ **(E)** $\frac{5}{6}$

Problema 23.
Sea $x_0, x_1, x_2, \ldots$ una sucesión de números, donde cada x_k es igual a 0 o a 1. Para cada entero positivo n, defina

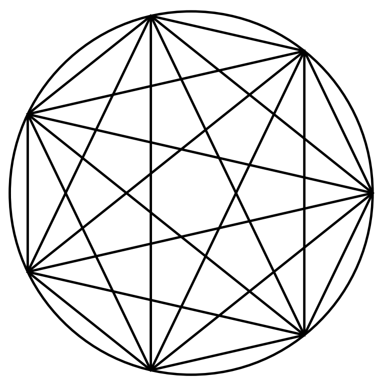
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k 2^k.$$

Asuma que $7S_n \equiv 1 \pmod{2^n}$ para todo $n \geq 1$. Calcule el valor de la suma

$$x_{2019} + 2x_{2020} + 4x_{2021} + 8x_{2022}.$$

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 12 **(D)** 14 **(E)** 15

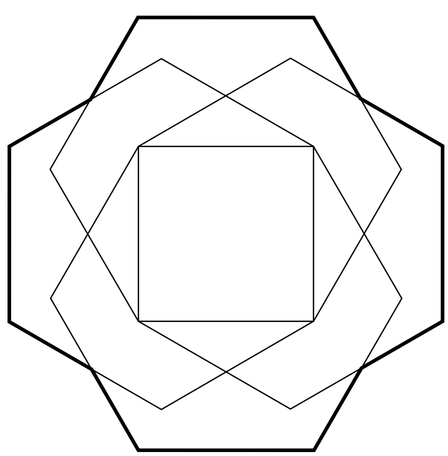
Problema 24.
La siguiente figura ilustra un heptágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1.



Calcule la suma de las cuartas potencias de las longitudes de todos sus 21 lados y diagonales.

(A) 49 **(B)** 98 **(C)** 147 **(D)** 168 **(E)** 196

Problema 25.
Cuatro hexágonos regulares rodean a un cuadrado de lado 1, donde cada uno comparte una arista con el cuadrado, tal como se muestra en la figura. El área del polígono exterior no convexo de 12 lados se puede expresar como $m\sqrt{n} + p$, donde m, n y p son enteros y n no es divisible por el cuadrado de ningún primo. ¿Cuánto es $m + n + p$?



(A) -12 **(B)** -4 **(C)** 4 **(D)** 24 **(E)** 32