Problema 1.
La señora Jones vierte jugo de naranja en cuatro vasos idénticos para sus cuatro hijos. Ella consigue llenar tres vasos de forma completa, pero el jugo restante solo le alcanza para llenar el cuarto vaso hasta $\frac{1}{3}$ de su capacidad. ¿Qué fracción de un vaso debe vertir la señora Jones de cada uno de los primeros tres vasos en el cuarto vaso para conseguir que los cuatro vasos tengan la misma cantidad de jugo?

(A) $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{2}{9}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

Problema 2.
Carlos fue a una tienda deportiva para comprar un par de zapatillas. Las zapatillas están de oferta: los precios tienen un 20 % de descuento en cada par de zapatillas. Carlos también sabe que tiene que pagar un 7,5 % de impuestos sobre el precio descontado. Él tiene \$43. ¿Cuál es el precio original (antes del descuento) de las zapatillas más caras que se puede permitir pagar?

(A) \$46 **(B)** \$47 **(C)** \$48 **(D)** \$49 **(E)** \$50

Problema 3.
Un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 está inscrito en un círculo A y un triángulo rectángulo de lados 5, 12 y 13 está inscrito en un círculo B. ¿En qué razón están el área del círculo A y el área del círculo B?

(A) $\frac{1}{9}$ **(B)** $\frac{25}{169}$ **(C)** $\frac{4}{25}$ **(D)** $\frac{1}{5}$ **(E)** $\frac{9}{25}$

Problema 4.
El pincel de Jackson puede pintar una franja estrecha de 6,5 milímetros de ancho. Jackson tiene suficiente pintura para pintar una franja de 25 metros de largo. ¿Cuántos centímetros cuadrados de papel puede cubrir Jackson con esta cantidad de pintura?

(A) 162,5 **(B)** 1625 **(C)** 16250 **(D)** 162500 **(E)** 1625000

Problema 5.
Estás jugando un juego. Un rectángulo de 2×1 cubre dos casillas adyacentes (orientadas de forma horizontal o vertical) de un tablero de 3×3, pero no sabes cuales casillas fueron cubiertas. Tu objetivo es encontrar al menos una de las casillas cubiertas por el rectángulo. Un "turno" consiste en que eliges una casilla, después de esto te informan si la casilla elegida está cubierta por el rectángulo escondido. ¿Cuál es el mínimo número de turnos que necesitas para asegurar que al menos una de tus casillas elegidas está cubierta por el rectángulo?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 8

Problema 6.
Las raíces del polinomio

$$P(x) = (x-1)^1(x-2)^2(x-3)^3 \cdots (x-10)^{10}$$

son retiradas de la recta real, el conjunto restante es igual a la unión de 11 intervalos abiertos disjuntos. ¿En cuántos de estos intervalos se cumple que $P(x)$ es positivo?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

Problema 7.
¿Cuántos valores enteros de n cumplen que la expresión

$$\sqrt{\frac{\log(n^2) - (\log n)^2}{\log n - 3}}$$

es un número real?

Nota: log denota el logaritmo en base 10.

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 900 **(D)** 901 **(E)** 902

Problema 8.
¿Cuántos subconjuntos no vacíos B de $\{0, 1, 2, \ldots, 12\}$ tienen la propiedad que el número de elementos en B es igual al menor elemento de B? Por ejemplo, $B = \{4, 6, 8, 11\}$ cumple esta condición.

(A) 108 **(B)** 136 **(C)** 144 **(D)** 156 **(E)** 256

Problema 9.
Calcule el área de la región en el plano cartesiano definida por

$$||x| - 1| + ||y| - 1| \leq 1.$$

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 8 **(D)** 12 **(E)** 15

Problema 10.
En el plano xy, una circunferencia de radio 4 con centro sobre el eje positivo x es tangente al eje y en el origen y una circunferencia de radio 10 con centro sobre el eje positivo y es tangente al eje x en el origen. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos en donde estas circunferencias se intersectan?

(A) $\frac{1}{\sqrt{29}}$ **(B)** $\frac{2}{7}$ **(C)** $\frac{2}{\sqrt{29}}$ **(D)** $\frac{2}{5}$ **(E)** $\frac{3}{7}$

Problema 11.
¿Cuál es el área máxima de un trapecio isósceles en el que se cumple que la longitud de una de sus bases es igual al doble de la otra y, además, la longitud de los lados no paralelos es igual a 1?

(A) $\frac{8}{7}$ **(B)** $\frac{5}{4}$ **(C)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ **(D)** $\frac{3}{2}$ **(E)** $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

Problema 12.
Dados dos números complejos $u = a + bi$ y $v = c + di$ (donde $i = \sqrt{-1}$), definimos la operación binaria

$$u \otimes v = ac + bd\, i.$$

Suponga que z es un número complejo tal que $z \otimes z = z^2 + 40$. ¿Cuál es el valor de $|z|$?

(A) 2 **(B)** $\sqrt{5}$ **(C)** $\sqrt{10}$ **(D)** 5 **(E)** $5\sqrt{2}$

Problema 13.
Una caja rectangular $\mathcal{P}$ tiene aristas de longitudes distintas a, b y c. La suma de las longitudes de las 12 aristas de $\mathcal{P}$ es 13, la suma de las áreas de las 6 caras de $\mathcal{P}$ es $\frac{11}{2}$ y el volumen de $\mathcal{P}$ es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la longitud de la mayor diagonal interior que conecta dos vértices de $\mathcal{P}$?

(A) $\frac{3}{8}$ **(B)** $\frac{9}{8}$ **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** 2 **(E)** $\frac{9}{4}$

Problema 14.
¿Cuántos pares ordenados de números enteros (a, b) cumplen que el polinomio

$$x^3 + ax^2 + bx + 6$$

tiene 3 raíces enteras distintas?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

Problema 15.
Sean a, b y c enteros positivos tales que

$$\frac{a}{14} + \frac{b}{15} = \frac{c}{210}.$$

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son necesariamente ciertas?

I. Si $\operatorname{mcd}(a, 14) = 1$ o $\operatorname{mcd}(b, 15) = 1$ o ambos, entonces $\operatorname{mcd}(c, 210) = 1$.

II. Si $\operatorname{mcd}(c, 210) = 1$, entonces $\operatorname{mcd}(a, 14) = 1$ o $\operatorname{mcd}(b, 15) = 1$ o ambos.

III. $\operatorname{mcd}(c, 210) = 1$ si y solo si $\operatorname{mcd}(a, 14) = 1$ y $\operatorname{mcd}(b, 15) = 1$.

(A) solo I **(B)** solo III **(C)** solo I y II **(D)** solo II y III **(E)** I, II y III

Problema 16.
En el estado de Coinland, las monedas tienen valores de 6, 10 y 15 centavos. Suponga que x es el valor en centavos del objeto más caro en Coinland que no se puede comprar usando estas monedas de forma exacta. ¿Cuál es la suma de dígitos de x?

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11

Problema 17.
Las tres longitudes de los lados de un triángulo están en progresión arimética, siendo la menor de estas longitudes igual a 6. Uno de los ángulos interiores es igual a 120°. ¿Cuál es el área del triángulo?

(A) $8\sqrt{6}$ **(B)** $14\sqrt{2}$ **(C)** $12\sqrt{3}$ **(D)** $15\sqrt{3}$ **(E)** $20\sqrt{2}$

Problema 18.
El último año académico Yolanda y Zelda tomaron diferentes cursos que no necesariamente administraron la misma cantidad de exámenes durante cada uno de los dos semestres. El promedio de Yolanda durante el primer semestre fue 3 puntos mayor que el promedio de Zelda durante el primer semestre. El promedio de Yolanda durante el segundo semestre fue 18 puntos mayor que su promedio durante el primer semestre y, además, fue nuevamente 3 puntos mayor que el promedio de Zelda durante el segundo semestre. ¿Cuál de las siguientes proposiciones no puede ser cierta?

(A) El promedio anual de Yolanda fue 3 puntos mayor que el promedio anual de Zelda.
(B) El promedio anual de Yolanda fue 22 puntos mayor que el promedio anual de Zelda.
(C) El promedio anual de Zelda fue mayor que el promedio anual de Yolanda.
(D) El promedio anual de Zelda fue igual al promedio anual de Yolanda.
(E) Si Zelda sacaba 3 puntos más en cada examen que tomó, entonces ella tendría el mismo promedio anual que Yolanda.

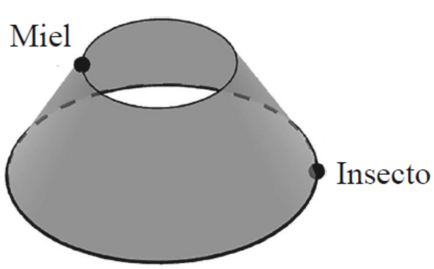
Problema 19.
Cada una de 2023 pelotas es puesta al azar en alguno de 3 recipientes. ¿Cuál de los siguientes números está más cerca de la probabilidad de que cada uno de los recipientes contenga una cantidad impar de pelotas?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{10}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{2}{3}$

Problema 20.
Cyrus el sapo está sentado sobre una superficie plana. Él salta aterrizando a 2 metros de distancia. Luego elige una dirección al azar y vuelve a saltar una distancia de 2 metros. ¿Cuál es la probabilidad que después del segundo salto Cyrus aterrice en un punto ubicado a lo más 1 metro de distancia de su posición inicial?

(A) $\dfrac{\arctan \frac{1}{2}}{\pi}$ **(B)** $\dfrac{2 \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{4}}{\pi}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{5}$ **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{8}$

Problema 21.
Una lámpara está hecha en forma de un cono circular recto truncado. La altura de la lámpara es igual a $3\sqrt{3}$ pulgadas, el diámetro superior es igual a 6 pulgadas y el diámetro inferior es igual a 12 pulgadas. Un insecto está en la parte inferior de la lámpara y un poco de miel está ubicado en la parte superior de la lámpara en un punto ubicado lo más lejos posible del insecto. El insecto quiere llegar hasta la miel, pero siempre debe permanecer en la superficie de la lámpara. ¿Cuál es la longitud en pulgadas del camino más corto que debe seguir para llegar a la miel?



(A) $6\sqrt{3}$ **(B)** $6\sqrt{5}$ **(C)** $6\sqrt{3} + \pi$ **(D)** $6 + 3\pi$ **(E)** $6 + 6\pi$

Problema 22.
Una función f con valores reales satisface la siguiente ecuación para todos los números reales a y b:

$$f(a+b)+f(a-b)=2f(a)f(b).$$

¿Cuál de los siguientes valores *no* puede ser igual al valor de $f(1)$?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2

Problema 23.
Un dado normal de 6 caras es lanzado n veces, el producto de los n números lanzados puede ser igual a cualquiera de 936 posibles valores. ¿Cuál es el valor de n?

(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11

Problema 24.
Sean a, b, c y d enteros positivos que satisfacen todas las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
abcd &= 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^7\\
\operatorname{mcm}(a,b) &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3\\
\operatorname{mcm}(a,c) &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3\\
\operatorname{mcm}(a,d) &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3\\
\operatorname{mcm}(b,c) &= 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^2\\
\operatorname{mcm}(b,d) &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2\\
\operatorname{mcm}(c,d) &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2.
\end{aligned}$$

¿Cuál es el valor de $\operatorname{mcd}(a,b,c,d)$?

(A) 3 **(B)** 6 **(C)** 15 **(D)** 30 **(E)** 45

Problema 25.
Un pentágono regular de área $1+\sqrt{5}$ fue impreso en una hoja de papel y luego recortado. A continuación doblamos la hoja pentagonal de tal forma que uno de los vértices coincida con el centro del pentágono. Luego de realizar esto con cada uno de los 5 vértices, se forma un pentágono menor con las líneas de los dobleces. ¿Cuál es el área de este nuevo pentágono?

(A) $\sqrt{5}-1$ **(B)** $8-3\sqrt{5}$ **(C)** $\dfrac{2+\sqrt{5}}{3}$ **(D)** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(E)** $4-\sqrt{5}$