

XXX Olimpiada Matemática Rioplatense
San Isidro – 5 de Diciembre de 2023
Nivel 1 – Primer Día



Problema 1

Dado un entero positivo de cinco dígitos $n = abcde$, definimos la *suma giratoria* de n como el valor de la siguiente suma:

$$bcdea + cdeab + deabc + eabcd.$$

Por ejemplo, la suma giratoria de 20233 es 90877, porque

$$02332 + 23320 + 33202 + 32023 = 90877.$$

Sean m y n dos enteros positivos de cinco dígitos tales que las sumas giratorias de m y n son iguales. Demostrar que $m = n$.

Problema 2

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo que cumple las siguientes condiciones:

$$\widehat{BAC} = 2\widehat{BCA}, \quad \widehat{BCA} + \widehat{CAD} = 90^\circ \quad \text{y} \quad BC = BD.$$

Determinar la medida del ángulo \widehat{ADB} .

Problema 3

En el pizarrón está escrito el número N de 400 dígitos formado por 100 copias del número 2023, es decir, $N = 202320232023 \dots 2023$.

Lionel debe borrar algunos dígitos de N de manera que el número que se obtenga sea un múltiplo de 84 lo más grande posible. Determinar qué dígitos debe borrar Lionel y cuál es el número que se obtiene.

Aclaración. Si al número 18123342 se le borran el 4 y el segundo 1, el número que se obtiene es 182332.

Duración: 3 horas y media
Versión: ESPAÑOL

XXX Olimpiada Matemática Rioplatense
San Isidro – 6 de Diciembre de 2023
Nivel 1 – Segundo Día



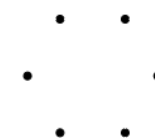
Problema 4

Inicialmente se tiene un triángulo de papel ABC en el cual el ángulo $B\hat{A}C$ mide 120° . En la primera etapa, se trazan las bisectrices de los tres ángulos del triángulo, que se cortan en el punto I , y luego con una tijera se recorta siguiendo los segmentos AI , BI y CI , obteniendo así 3 triángulos: ABI , BCI y CAI . En la segunda etapa, se repite ese mismo procedimiento con los tres triángulos, es decir, cada uno de ellos se divide en tres triángulos más pequeños recortando por las bisectrices. Al final de la segunda etapa hay 9 triángulos en total. Este procedimiento continúa de la misma manera hasta completar 10 etapas.

¿Cuántos de los triángulos obtenidos al final del proceso tienen un ángulo de 120° ?

Problema 5

En el pizarrón están marcados 6 puntos que son los vértices de un hexágono regular. Ana traza algunos segmentos que son diagonales o lados del hexágono, a su elección (puede incluso decidir no trazar ningún segmento, o trazar los 15 segmentos posibles).



Luego Beto debe escribir un número entero positivo en cada vértice, de modo que se cumpla la siguiente condición: si dos vértices están conectados por un segmento que trazó Ana, entonces los números que les corresponden deben tener algún divisor común mayor que 1; en cambio, si no están conectados por un segmento, los números no deben tener ningún divisor común mayor que 1.

- (a) Demostrar que Beto siempre puede cumplir su tarea.
- (b) Una vez que Beto completa su tarea, debe pagarle a Ana M pesos, donde M es el mayor de los 6 números que escribió Beto. Beto quiere pagar lo menos posible y Ana quiere recibir la mayor cantidad de dinero posible. ¿Puede Ana trazar los segmentos de alguna manera que le asegure recibir más de 2023 pesos?

Problema 6

Un grupo de 4046 amigos va a jugar un torneo de videojuegos. Para esto, 2023 de los amigos van a una sala donde hay 2023 computadoras etiquetadas como a_1, \dots, a_{2023} y los otros 2023 amigos van a otra sala donde hay 2023 computadoras etiquetadas como b_1, \dots, b_{2023} . Siempre el jugador de la computadora a_i se enfrentará a los jugadores que se sienten en las computadoras b_i, b_{i+2}, b_{i+3} y b_{i+4} (notar que **no** se enfrenta al jugador de la computadora b_{i+1}). Luego de jugar la primera ronda, dentro de cada sala les piden que vuelvan a elegir computadora. Después de reordenarse, todos los jugadores notan que les toca enfrentarse a las mismas personas que en la primera ronda. Demostrar que si algún jugador volvió a elegir la misma computadora que en la primera ronda, entonces todos lo hicieron.

Aclaración. Los índices se toman módulo 2023, es decir: consideramos $b_{2024} = b_1$, $b_{2025} = b_2$, etcétera.

Duración: 3 horas y media
Versión: ESPAÑOL