## XXX Olimpíada Matemática Rioplatense
## San Isidro – 5 de Diciembre de 2023
## Nivel 2 – Primer Día

**Problema 1**
Un número entero $n \geq 3$ se dice que es un número *pitagórico poligonal* si existen enteros positivos distintos dos a dos que pueden colocarse en los vértices de un $n$-ágono regular de manera que la suma de los cuadrados de los números de cualesquiera dos vértices consecutivos sea un cuadrado perfecto. Por ejemplo, 3 es un pitagórico poligonal porque colocando 44, 117 y 240 en los vértices de un triángulo, observamos que

$$44^2 + 117^2 = 125^2,\ 117^2 + 240^2 = 267^2, \text{ y } 240^2 + 44^2 = 244^2.$$

Determinar todos los enteros pitagóricos poligonales.

**Problema 2**
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $AB = CD$, $B\hat{C}D = 2B\hat{A}D$, $A\hat{B}C = 2A\hat{D}C$ y $B\hat{A}D \neq A\hat{D}C$. Determinar la medida del ángulo entre las diagonales $AC$ y $BD$.

**Problema 3**
Sean $n > d > 0$ enteros. Ana, Beto y Carlitos juegan al *gallo ciego* en una cuadrícula infinita. Inicialmente, Ana y Carlitos están en casillas a distancia $n$, y un dulce está en una casilla a distancia $d$ de Carlitos. Carlitos tiene los ojos vendados y sólo ve su casilla. Ana y Beto pueden ver todo. Se realizan alternadamente los siguientes movimientos.

1. Carlitos se mueve a una casilla adyacente. Si encuentra a Ana, Carlitos pierde. Si encuentra al dulce, pero no a Ana, gana Carlitos. Si la casilla estaba vacía, Beto elige gritar “caliente” o “frio” según su criterio.
2. Ana se mueve a una casilla adyacente. Si en ella esta Carlitos o el dulce, Ana gana. Si no, el juego continúa.

Determine, para cada $d$, el menor $n$ tal que Beto y Carlitos pueden coordinar una estrategia para asegurarse la victoria de Carlitos, sin importar las posiciones iniciales de Ana, Carlitos y el dulce.

ACLARACIÓN: Dos casillas son adyacentes si comparten un lado en común. La distancia entre dos casillas $X$ e $Y$ es el menor $p$ tal que existen casillas $X = X_0, X_1, \ldots, X_p = Y$ con $X_i$ adyacente a $X_{i-1}$ para $i = 1, \ldots, p$.

**Duración: 3 horas y media**
**Versión: ESPAÑOL**

**Problema 4**

Un conjunto de puntos es *antiparalelográmico* si cualesquiera cuatro de sus puntos no son vértices de un paralelogramo. Dado un conjunto de 2023 puntos en el plano, sin tres de ellos colineales, demostrar que contiene un conjunto antiparalelográmico de 17 puntos.

**Problema 5**

Decimos que un entero positivo $N$ es *rioplatense* si cumple las siguientes dos condiciones:

- Es posible encontrar 34 enteros consecutivos tales que su producto sea divisible por $N$ pero ninguno de ellos sea divisible por $N$.
- Es imposible encontrar 30 enteros consecutivos tales que su producto sea divisible por $N$ pero ninguno de ellos sea divisible por $N$.

Determinar todos los enteros rioplatenses.

**Problema 6**

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Determinar todas las funciones $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que

$$f(x + f(y+1)) + f(xy) = f(x+1)(f(y) + 1)$$

para cualesquiera $x, y$ enteros.

**Duración: 3 horas y media**
**Versión: ESPAÑOL**