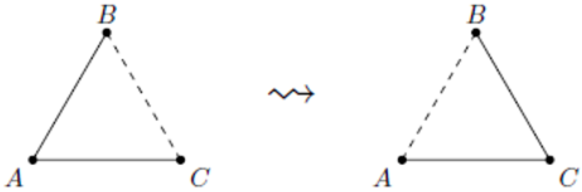
XXX Olimpiada Matemática Rioplatense
San Isidro – 5 de Diciembre de 2023
Nivel 3 – Primer Día

Problema 1
Determinar todas las ternas (x, y, p) de números enteros positivos tales que p es un primo, $p - 1 = x^2$ y $2p^2 - 1 = y^2$.

Problema 2
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $AB > AD$ y $\hat{B} = \hat{D} = 90^o$. Sea P el punto sobre el lado AB tal que $AP = AD$. Las rectas PD y BC se intersecan en Q. La perpendicular a AC por Q interseca a AB en R. Sea S el pie de la perpendicular de D a AC. Demostrar que $P\hat{S}Q = R\hat{C}P$.

Problema 3
La ciudad fluvial de Platense consiste en varias plataformas y puentes entre ellas. Cada puente conecta dos plataformas y no hay dos puentes conectando las mismas dos plataformas. El alcalde quiere cambiar algunos puentes de lugar a través de una serie de movimientos de la siguiente forma: si hay tres plataformas A, B y C y puentes AB y AC pero no BC, se puede cambiar AB por BC.



Una configuración de puentes es *buena* si se puede ir desde cualquier plataforma a cualquier otra usando solamente los puentes. Partiendo de una configuración buena, demostrar que el alcalde puede llegar a cualquier otra configuración buena, cuya cantidad de puentes es la misma, mediante los movimientos descritos.

Duración: 3 horas y media
Versión: ESPAÑOL

XXX Olimpíada Matemática Rioplatense
San Isidro – 6 de Diciembre de 2023
Nivel 3 – Segundo Día

Problema 4
Mati está jugando con unas cajas y una máquina mágicas. Cada caja tiene un valor interior. Al abrir una caja Mati ve su valor, suma a su puntaje el valor de la caja y ésta se destruye (si el puntaje de la caja es negativo, Mati pierde puntos). Al colocar una caja mágica con valor X en la máquina, esta caja se destruye y obtenemos dos cajas mágicas de valores $X+1$ y $X-1$ (no se sabe cuál es cada una, pero sí cuáles son las cajas nuevas). Al comenzar el juego Mati tiene 0 puntos y una caja mágica cuyo valor sabe que es 0.

a) Demostrar que Mati puede asegurarse llegar a 1000 puntos o más.
b) ¿Puede Mati asegurarse llegar a 1000000 puntos o más, sin tener menos de -42 puntos en ningún momento?

Problema 5
Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los reales positivos. Encontrar todos los reales no negativos α para los cuales existe una función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$f(x^\alpha + y) = (f(x+y))^\alpha + f(y)$$

para cualesquiera x, y reales positivos.

Problema 6
Sea ABC un triángulo acutángulo tal que $AB + BC = 4AC$. Sea D en AC tal que BD es bisectriz de $A\hat{B}C$. En el segmento BD se ubican P y Q de modo que $BP = 2DQ$. La perpendicular por Q a BD corta a los segmentos AB y BC en X e Y, respectivamente. Sea L la recta paralela a AC que pasa por P. Supongamos que B está en un semiplano respecto a L diferente de X e Y. Una hormiga inicia un recorrido desde X, va hacia un punto de la recta AC, luego va hacia uno de L, regresa a uno de AC y termina en el punto Y. Demostrar que la menor longitud posible del recorrido de la hormiga es $4XY$.

Duración: 3 horas y media
Versión: ESPAÑOL