



PERÚ

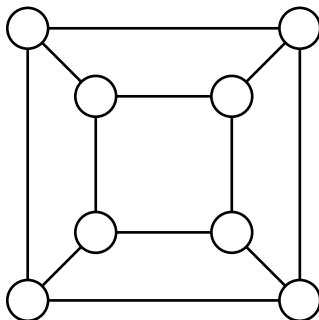
Ministerio  
de EducaciónSOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA  
Fundada el 29 de Marzo de 1957

## XVIII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2022)

## Etapa Nacional - Nivel 3

27 de octubre de 2022

1. La siguiente figura está formada por 12 segmentos y 8 círculos. Como se puede ver, al inicio todos los círculos están vacíos. En cada operación se escoge un círculo vacío, se pinta de rojo y dentro se escribe el número de círculos vecinos rojos que tiene el círculo escogido (en la primera operación se pinta de rojo el círculo escogido y se escribe el número 0). Luego de 8 operaciones todos los círculos están pintados de rojo y tienen cada uno un número escrito. Demuestre que, sin importar cómo se hayan hecho las operaciones, la suma de todos los números al final es la misma.



2. Sea  $D$  el punto medio del lado  $BC$  de un triángulo  $ABC$  y sea  $G$  el punto del segmento  $AD$  tal que  $AG = 2GD$ . Sean  $E$  y  $F$  puntos de los lados  $AB$  y  $AC$ , respectivamente, tales que  $G$  se encuentra en el segmento  $EF$ . Sean  $M$  y  $N$  puntos de los segmentos  $AE$  y  $AF$ , respectivamente, tales que  $ME = EB$  y  $NF = FC$ .
- a) Demuestre que el área del cuadrilátero  $BMNC$  es igual a cuatro veces el área del triángulo  $DEF$ .
- b) Demuestre que los cuadriláteros  $MNFE$  y  $AMDN$  tienen igual área.
3. Sea  $\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface:

$$f(xy) + y + f(x + f(y)) = (y + 1)f(x),$$

para todos los números reales  $x, y$ .

- a) Determine el valor de  $f(0)$ .
- b) Demuestre que  $f(x) = 2 - x$  para todo número real  $x$ .

4. Para cada entero positivo  $n$  se define el número  $R(n) = 11 \cdots 1$ , el cual está formado por exactamente  $n$  dígitos 1. Por ejemplo,  $R(5) = 11111$ . Sea  $n > 4$  un número entero para el cual al escribir todos los divisores positivos de  $R(n)$  se cumple que cada dígito escrito pertenece al conjunto  $\{0, 1\}$ . Demuestre que  $n$  es potencia de un número primo impar.

*Aclaración:* Una potencia de un número primo impar es un número de la forma  $p^a$ , donde  $p$  es un número primo impar y  $a$  es un entero positivo.