



PERÚ

Ministerio
de EducaciónSOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA
Fundada el 29 de Marzo de 1957

XIX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2023)

Etapa Nacional - Nivel 2

22 de noviembre de 2023

1. Algunos profesores y 107 estudiantes fueron a una caminata. Por motivos de seguridad, todos los participantes se dividieron en grupos de exactamente 7 personas, de tal manera que en cada grupo haya por lo menos un profesor. Determine como mínimo cuántos profesores pudieron haber participado en la caminata.
2.
 - a) Sean a y b números reales tales que $a^2 + ab + b^2 = 3$, determine el mayor valor posible de b .
 - b) Sean a , b y c números reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc = 1$, determine el mayor valor posible de b .
3. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 120^\circ$ y $AB > AC$. Sea P un punto en el plano tal que $AP = AB$ y AP es perpendicular a AC (suponga que el segmento PA interseca al segmento BC). Sea S el punto donde la recta perpendicular a CP que pasa por P , corta a la recta AC . Sea T un punto en el segmento AB tal que $TB = CA$ y, finalmente, sea L el punto donde la recta CT corta al segmento BS . Demuestre que los puntos A , T , L y S pertenecen a una misma circunferencia.
4. Un profesor piensa en un número entero $N > 1$ y le pide a Raúl que encuentre dicho número. Para ayudar a Raúl, el profesor escribe algunas pistas en la pizarra. Las pistas pueden ser de dos tipos:
 - El profesor elige un entero positivo a y escribe en la pizarra: “ N es divisor de a ”.
 - El profesor elige un entero positivo b y escribe en la pizarra: “ N no es divisor de b ”.

Por ejemplo, si el profesor piensa en $N = 2$, entonces el profesor puede escribir en la pizarra las siguientes tres pistas: “ N es divisor de 4”, “ N es divisor de 6” y “ N no es divisor de 5”. Con estas tres pistas Raúl puede decir con seguridad que el profesor pensó en el número $N = 2$.

Para cada $N > 1$, determine la menor cantidad de pistas que debe escribir el profesor para que Raúl consiga determinar con seguridad el valor de N .