



PERÚ

Ministerio
de Educación

SOCIEDAD MATEMÁTICA PERUANA

Fundada el 29 de Marzo de 1957

XIX OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2023)

Etapa Nacional - Nivel 3

23 de noviembre de 2023

-
- Definimos el conjunto $\mathcal{M} = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 99^2, 100^2\}$.
 - ¿Cuál es el menor entero positivo que divide a exactamente dos elementos de \mathcal{M} ?
 - ¿Cuál es el mayor entero positivo que divide a exactamente dos elementos de \mathcal{M} ?
 - Para cada número real positivo x , sea $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Demuestre que si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo, entonces $f(a), f(b), f(c)$ son las longitudes de los lados de un triángulo.
 - Demuestre que, para todo número entero $n \geq 2$, es posible dividir un hexágono regular en n cuadriláteros tales que cualesquiera dos de ellos sean semejantes.

Aclaración: Dos cuadriláteros son semejantes si tienen sus lados correspondientes proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales, es decir, los cuadriláteros $ABCD$ y $EFGH$ son semejantes si $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$, $\angle ABC = \angle EFG$, $\angle BCD = \angle FGH$, $\angle CDA = \angle GHE$ y $\angle DAB = \angle HEF$.
 - Sean ABC un triángulo acutángulo escaleno y K un punto en su interior que pertenece a la bisectriz del ángulo $\angle ABC$. Sea P el punto donde la recta AK interseca a la recta perpendicular a AB que pasa por B , y sea Q el punto donde la recta CK interseca a la recta perpendicular a CB que pasa por B . Sea L el pie de la perpendicular trazada desde K a la recta AC . Pruebe que si PQ es perpendicular a BL , entonces K es el incentro de ABC .