Indonesia International Mathematics Competition 2022 (Virtual)

Indonesia, 30th June to 6th July 2022

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Examen Individual

Tiempo límite: 120 minutos

Información:

- Tienes 120 minutos para este examen, el cual consiste de 12 preguntas en la Sección A donde solo se requieren respuestas numéricas, y 3 preguntas en la Sección B donde se requieren soluciones completas.
- Cada pregunta de la Sección A vale 5 puntos. No se dan puntos parciales. No hay penalización por respuestas incorrectas, pero no debes escribir más de las respuestas que se te piden. Para preguntas con varias respuestas, se darán puntos completos solo si escribes todas las respuestas correctas. Cada pregunta de la Sección B vale 20 puntos. Se pueden otorgar puntos parciales.
- Las figuras pueden no estar a escala.

Instrucciones:

- Escribe tu nombre, tu número de participante y el nombre de tu equipo en el espacio que se indica en la primera página del examen.
- Para la Sección A, escribe tus respuestas en el espacio que hay después de cada pregunta en la hoja de problemas. Para la Sección B escribe tu solución en el espacio asignado después de cada pregunta.
- Debes usar un lápiz HB, B o 2B o bien pluma de tinta negra o tinta azul.
- No está permitido usar transportador, calculadora ni aparatos electrónicos.
- Al final de la competencia, debes entregar el sobre con el examen, la hoja de respuestas y todas las hojas que hayas usado.

Spanish Version

Equipo:_____________ ***Nombre***: _________________________ ***ID.***:___________________

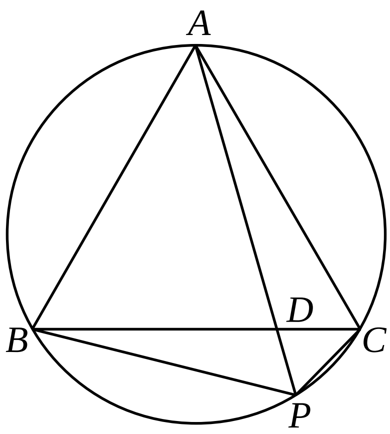
Sección A.
En esta sección hay 12 preguntas. Escribe tu respuesta en el espacio que se indica al final de cada pregunta. Cada respuesta correcta vale 5 puntos.

1. Se sabe que la ecuación $x^2 + px + q = 0$ tiene dos raíces enteras positivas. Si $p + q = 16$, ¿cual es el valor de q?

2. ¿Cuántos enteros positivos n hay tales que $n^2 + n$ tiene exactamente 6 divisores positivos?

3. Sean a, b y c números reales positivos tales que la expresión $\dfrac{3a^2 + b^2 + 3c^2}{ab + bc + ac}$ alcanza su valor mínimo. Si $abc = 432$, encuentra el valor de $3a + b + 3c$.

4. En la figura mostrada, sea P un punto en el circuncírculo del triángulo equilátero ABC tal que $PB = 24$ cm y $PC = 8$ cm. Si AP y BC se intersectan en D, encuentra la longitud, en cm, de PD.

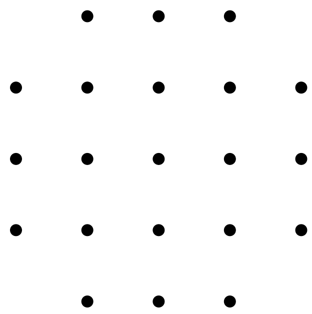


5. Sean a, b, c y d enteros positivos tales que $0 < a < b < c < d < 2022$, $a + d = b + c$ y $bc - ad = 2021$. ¿Cuántas cuadrúplas ordenadas (a, b, c, d) hay tales que cumplen estas condiciones?

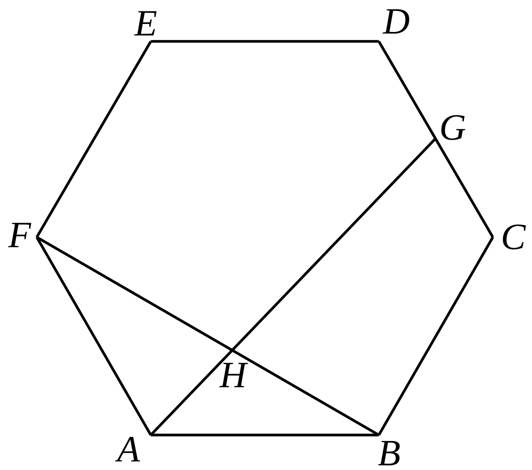
6. Sea $f(n)$ el número de veces que aparece el dígito 2 en la sucesión de enteros positivos: 1, 2, 3, 4, …, n. Por ejemplo: $f(23) = 7$, pues el dígito 2 aparece una vez en los números 2, 12, 20, 21, 23 y dos veces en el número 22, por lo que $f(23) = 5 + 2 = 7$. Encuentra un entero positivo n tal que $f(n) = n$.

7. Sean a y b las dos raíces diferentes de $x^2 + 2018x + 1 = 0$, y sean c y d las dos raíces diferentes de $x^2 - 2022x + 1 = 0$.
Encuentra el valor de $(a + c)(a - d)(b + c)(b - d)$.

8. De la cuadrícula mostrada en la siguiente figura, ¿de cuántas formas podemos elegir tres puntos diferentes de tal forma que los tres puntos formen un triángulo no degenerado?



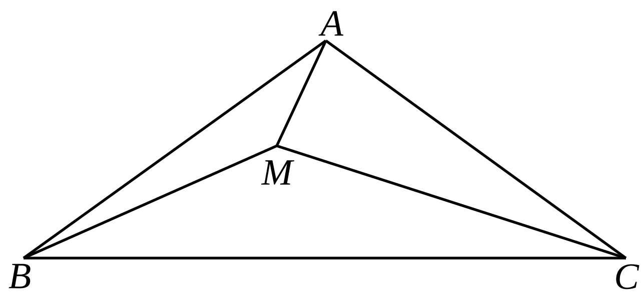
9. En la siguiente figura, sea *ABCDEF* un hexágono regular. Sean *G* el punto medio de *CD* y *H* el punto de intersección de *AG* y *BF*, como se muestra en la figura. Si la longitud de *BF* es 140 cm, encuentra la longitud, en cm, de *BH*.



10. Mil números diferentes de cero $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{1000}$ son escritos en orden cíclico alrededor de un círculo. Resulta que cada número escrito en una posición impar es igual a la suma de sus dos vecinos, y que cada número escrito en una posición par es igual al producto de sus dos vecinos. ¿Cuáles son los posibles valores para la suma de estos mil números?

11. ¿Cuántos enteros positivos de 10 dígitos hay tales que el producto de sus dígitos es 120 y la suma de sus dígitos es 20?

12. En la siguiente figura, el triángulo *ABC* es isósceles con $AB = AC$ y $\angle A = 108°$. Sea *M* un punto en el interior de *ABC* tal que $\angle MAB = 30°$ y $\angle MBA = 12°$. Encuentra la medida, en grados, del ángulo $\angle MCB$.



Examen Individual Sección B

2nd July, 2022, Indonesia

Equipo : ________________ Nombre : ____________________ ID : ____________

Sección B.

Responde las siguientes 3 preguntas, y escribe tu solución detallada en el espacio al final de cada enunciado. Cada pregunta vale 20 puntos.

1. Anna y Boris juegan un juego usando un tablero de 6×8 que contiene una ficha en cada cuadrado unitario. Anna va primero, y se alternarán los turnos después de esto. En su turno, Anna toma dos fichas en cuadrados adyacentes en la misma fila o columna. En su turno, Boris toma únicamente una ficha. Sin embargo, si Anna no puede tomar dos fichas adyacentes cuando sea su turno, Boris obtiene las fichas restantes en el tablero. ¿Cuál es el máximo número de fichas que Boris puede garantizar que obtendrá sin importar cómo juegue Anna?

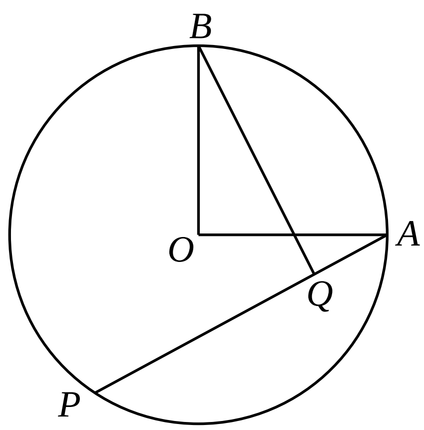
Respuesta: ______________

Examen Individual Sección B

2nd July, 2022, Indonesia

Equipo : ______________ Nombre : ________________ ID : ___________

2. Sean OA y OB dos radios de un círculo con centro O, tales que $OA \perp OB$, como se muestra en la siguiente figura. Sean P un punto sobre la circunferencia y Q un punto sobre AP tales que $AP = 4AQ$. Si $OA = 8$ cm, ¿cuál es la longitud mínima posible, en cm, de BQ?



Respuesta: ____________ cm

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Examen Individual Sección B

2nd July, 2022, Indonesia

Equipo : ______________ Nombre : __________________ ID : ___________

3. Sea $\overline{abcd}$ un número de cuatro dígitos, con $a, c \neq 0$, tal que $\dfrac{\sqrt{\overline{abcd}}}{\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{\overline{cd}}}$ es un número racional. Encuentra todos los posibles valores de $\overline{abcd}$.

Respuesta: ______________