



Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1° al 7° de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Examen por equipos

Tiempo límite: 70 minutos

Información:

- Tienes 70 minutos para responder el examen, que consiste de 10 preguntas impresas en hojas separadas. Para las preguntas 1, 3, 5, 7 y 9, se requieren solo respuestas numéricas. Para las preguntas 2, 4, 6, 8 y 10, se requieren soluciones completas.
- Cada pregunta tiene un valor de 40 puntos. Para los problemas impares, no se darán puntos parciales. No hay penalización por respuestas incorrectas, pero no debes tener más respuestas de las requeridas. Para los problemas que tienen varias respuestas, el total de puntos se dará solo si se encuentran escritas todas las respuestas correctas. Para los problemas pares, se podrán dar puntos parciales.
- Las figuras mostradas pueden no estar dibujadas a escala.

Instrucciones:

- Escribe tu nombre, tu ID de participante, y el nombre de tu equipo antes de avanzar a la siguiente página. Escribe el nombre de tu equipo en el espacio correspondiente de cada hoja.
- No puedes usar transportador, calculadora o aparatos electrónicos.
- Para las preguntas impares, ingresa tus respuestas en la columna que se indica después de cada pregunta. No es necesario incluir el tipo de unidad en tus respuestas. El formato es como sigue:
 1. Números decimales $a.bc$, donde a, b y c son dígitos, escribe $a.bc$.
 2. Fracciones $\frac{a}{b}$, donde a y b son primos relativos, escribe a/b (Por ejemplo, si tu respuesta es $3\frac{2}{5}$, escribe $17/5$).
 3. Razones $a : b$, escribe $a:b$ o $a;b$ (no es necesario espacio después de “:” o “;”).
 4. Soluciones de la forma (a, b, c, \dots) , escribir a,b,c, \dots (no es necesario espacio después de “;”).
- Si la respuesta es $a + b \times \sqrt{c}$, escribe a,b,c (no es necesario espacio después de “;”). Por ejemplo, si tu respuesta es $3 + \sqrt{5}$, escribe 3,1,5).
- Para los problemas pares, escribe tu solución completa en las hojas proporcionadas.
- Durante los primeros 10 minutos, los cuatro miembros examinan los primeros 8 problemas juntos, y los discuten entre ellos. Se distribuyen estos problemas entre ellos, de manera que cada miembro tenga asignada al menos 1 pregunta.
- Durante los siguientes 35 minutos, los cuatro miembros del equipo deberán redactar las soluciones de sus problemas asignados, sin tener más comunicación / discusión entre ellos.
- Durante los últimos 25 minutos, los cuatro miembros trabajarán juntos para redactar las soluciones de los últimos 2 problemas.
- Al final de cada parte del examen, debes hacer click en “enviar” para las preguntas impares, y escanear o tomar fotografías de las soluciones a las preguntas pares y subirlas al sitio web indicado.

Spanish Version

Equipo: _____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1^o al 7^o de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Examen por equipos

3 de julio de 2023, Bulgaria

Resuelve

Equipo: _____ Nombre: _____ ID: _____

1. La ecuación $x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 0$ tiene raíces reales no negativas p, q, r .
Si $s = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, ¿cuál es el valor de $|s^4 - 18s^2 - 8s|$?

Answer: _____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1^o al 7^o de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

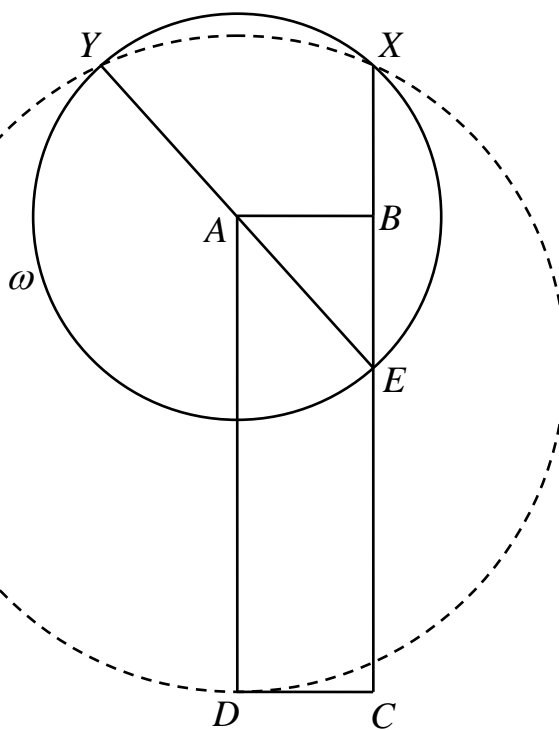
Examen por equipos

3 de julio de 2023, Bulgaria

Resuelve

Equipo: _____ Nombre: _____ ID: _____

2. Sea $ABCD$ un rectángulo, E un punto en el segmento BC . El círculo ω tiene centro A y pasa por E . Se extienden las rectas EB and AE cortando al círculo ω en X , Y respectivamente, como se muestra en la figura. Demuestra que DC es tangente al círculo que pasa por Y , X , D .





*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1^o al 7^o de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

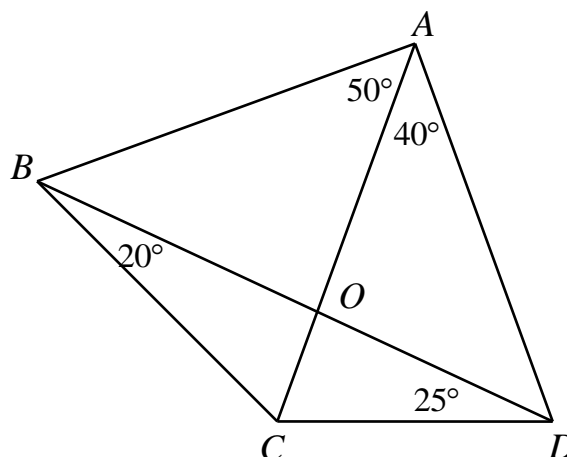
Examen por equipos

3 de julio de 2023, Bulgaria

Resuelve

Equipo: _____ Nombre: _____ ID: _____

3. El cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene $\angle CAD = 40^\circ$, $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle CBD = 20^\circ$ y $\angle CDB = 25^\circ$, como se muestra en la figura. Si O es intersección de AC y BD , ¿cuál es la medida, en grados, de $\angle AOB$?



o

Respuesta: _____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1^o al 7^o de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Examen por equipos

3 de julio de 2023, Bulgaria

Resuelve

Equipo: _____ Nombre: _____ ID: _____

4. Dinko puso algunas canicas en cien bolsas negras numeradas del 1 al 100. Cada vez, puedes preguntar a Dinko sobre la paridad de la cantidad de canicas en cualesquiera 15 bolsas distintas y Dinko responderá correctamente. ¿Cuál es la mínima cantidad de preguntas que debes hacer a Dinko, para determinar la paridad de la cantidad de canicas en la bolsa 1 correctamente? Muestra un ejemplo y justifica tu respuesta.

Respuesta: _____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1^o al 7^o de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

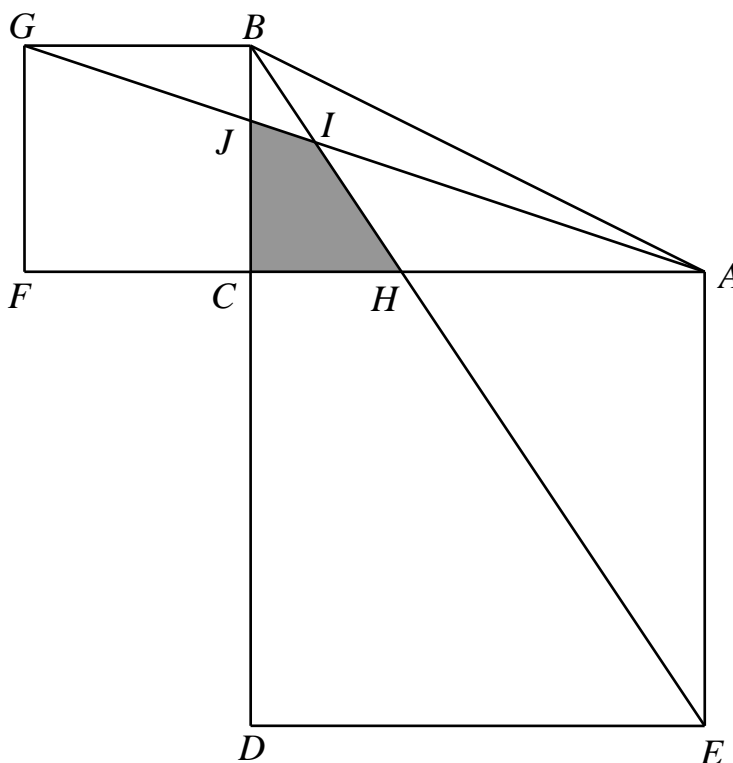
Examen por equipos

3 de julio de 2023, Bulgaria

Resuelve

Equipo: _____ Nombre: _____ ID: _____

5. Sea ABC un triángulo con $\angle C = 90^\circ$, $AC = 28$ cm y $BC = 14$ cm. Cuadrados $ACDE$ y $BCFG$ se construyen fuera de ABC . El segmento BE corta AC , AG en H , I respectivamente. AG corta BC en J , como se muestra en la figura. ¿cuál es el área, en cm^2 , del cuadrilátero $CHIJ$?



Respuesta: _____ cm^2



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1^o al 7^o de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Examen por equipos

3 de julio de 2023, Bulgaria

Resuelve

Equipo: _____ Nombre: _____ ID: _____

6. Existe una progresión aritmética infinita que cumple las siguientes propiedades:

- Cada término de la progresión es un entero positivo.
- La diferencia común de la progresión es d .
- Ningún término de la progresión aparece en la sucesión de Fibonacci.

¿Cuál es el menor valor posible del entero d para el cuál esto es posible?

(La sucesión de Fibonacci se define: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ para $n \geq 1$)

Respuesta: _____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1^o al 7^o de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Examen por equipos

3 de julio de 2023, Bulgaria

Resuelve

Equipo: _____ Nombre: _____ ID: _____

7. Un cuadrado perfecto N se llama “número BIMC” si existen tres enteros positivos a, b, c , con $a < b < c$, tales que

$$N = (b - a)(c - a)(c - b) = ab + ac + bc.$$

Por ejemplo, 230400 es un número BIMC ya que $230400 = 480 \times 480$ y $230400 = (288 - 224)(324 - 224)(324 - 288) = 224 \times 288 + 224 \times 324 + 288 \times 324$

¿Cuál es el menor número BIMC?

Respuesta: _____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1^o al 7^o de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Examen por equipos

3 de julio de 2023, Bulgaria

Resuelve

Equipo: _____ Nombre: _____ ID: _____

8. Tim quiere colocar 1600 puntos dentro de un cuadrado unitario tal que haya al menos un punto dentro de cada rectángulo de área $\frac{1}{200}$ y lados paralelos a los lados del cuadrado. ¿Es posible hacerlo? Si tu respuesta es “si”, por favor da un ejemplo y muestra que funciona. Si tu respuesta es “no”, demuestra que es imposible.

Respuesta: _____



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1^o al 7^o de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Examen por equipos

3 de julio de 2023, Bulgaria

Resuelve

Equipo: _____ Nombre: _____ ID: _____

9. ¿Cuántos enteros positivos de 7 dígitos distintos **no son** divisibles por 9?

Respuesta: _____



Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1^o al 7^o de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

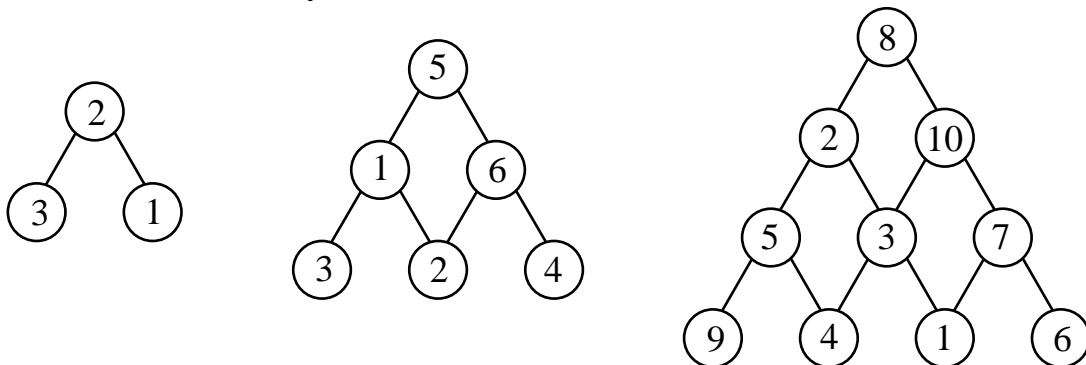
Examen por equipos

3 de julio de 2023, Bulgaria

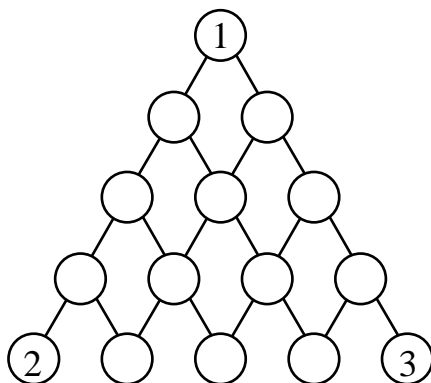
Resuelve

Equipo: _____ Nombre: _____ ID: _____

10. Un arreglo triangular de números se llama: *triángulo astuto de orden n* si uno puede acomodar todos los enteros positivos del 1 a $\frac{n(n+1)}{2}$ en un arreglo triangular tal que aparte del renglón de abajo con n números, cada número en los renglones de arriba es la diferencia absoluta o la suma de los dos números debajo de él. Los arreglos triangulares abajo son algunos ejemplos de triángulos astutos de ordenes 2, 3 y 4.



- (a) ¿Existe un triángulo astuto de orden 5 con los números 1, 2 y 3 en los vértices, como se muestra en la figura de abajo? Si tu respuesta es “sí”, muestra un ejemplo y si tu respuesta es “no” demuestra que es imposible. (10 puntos)



- (b) ¿Existe un triángulo astuto de orden 6? Si tu respuesta es “sí”, muestra un ejemplo y si tu respuesta es “no” demuestra que es imposible. (30 puntos)



*Bulgaria International
Mathematics Competition 2023
(Virtual)*

Bulgaria, 1^o al 7^o de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Examen por equipos

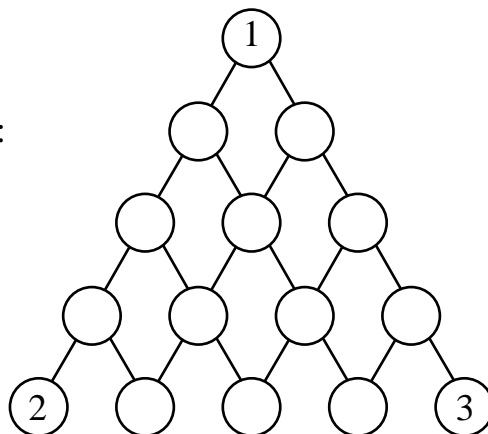
3 de julio de 2023, Bulgaria

Resuelve

Equipo: _____ Nombre: _____ ID: _____

10. Respuesta:

- (a) Mi respuesta es **SI** y el ejemplo se muestra a la derecha.
- Mi respuesta es **NO** y la demostración es:



- (b) Mi respuesta es **SI** y el ejemplo se muestra a la derecha.
- Mi respuesta es **NO** y la demostración es:

