Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1º al 7º de julio de 2023

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Examen Individual

Tiempo límite: 120 minutos

Información:

- Tienes 120 minutos para este examen, el cual consiste de 12 preguntas en la Sección A donde solo se requieren respuestas numéricas, y 3 preguntas en la Sección B donde se requieren soluciones completas.
- Cada pregunta de la Sección A vale 5 puntos. No se dan puntos parciales. No hay penalización por respuestas incorrectas, pero no debes escribir más de las respuestas que se te piden. Para preguntas con varias respuestas, se darán puntos completos solo si escribes todas las respuestas correctas. Cada pregunta de la Sección B vale 20 puntos. Se pueden otorgar puntos parciales.
- Las figuras pueden no estar a escala.

Instrucciones:

- Escribe tu nombre, tu clave de participante (ID) y el nombre de tu equipo antes de avanzar a la siguiente página.
- No está permitido el uso de transportador, calculadora, ni aparatos electrónicos.
- Para la Sección A ingresa tus respuestas en la columna que se indica después de cada pregunta. No es necesario incluir el tipo de unidad en tus respuestas. El formato es como sigue:
  1. Números decimales *a.bc*, donde *a*,*b* y *c* son dígitos, escribe *a.bc*.
  2. Fracciones $\frac{a}{b}$, donde *a* y *b* son primos relativos, escribe *a*/*b* (Por ejemplo, si tu respuesta es $3\frac{2}{5}$, escribe 17/5).
  3. Razones $a:b$, escribe *a*:*b* o *a*;*b* (no es necesario espacio después de ":" o ";").
  4. Soluciones de la forma (*a*, *b*, *c*, …), escribe *a*,*b*,*c*,....(no es necesario espacio después de ",").
- Si la respuesta es $a+b\times\sqrt{c}$, escribe *a*,*b*,*c* (no es necesario espacio después de ",". Por ejemplo, si tu respuesta es $3+\sqrt{5}$, escribe 3,1,5).
- Al final del examen, debes hacer click en "enviar" para las preguntas en la Sección A, y escanear o tomar fotografía de tus soluciones a las preguntas en la Sección B, y subirlas al sitio web indicado.

Spanish Version

Equipo:____________ ***Nombre***:________________ ***ID.***: ____________

Bulgaria International Mathematics Competition 2023 (Virtual)

Bulgaria, 1º al 7º de julio de 2023

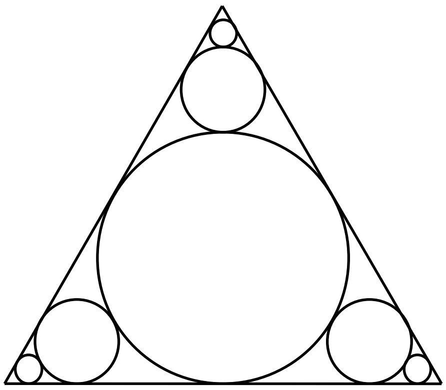
Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

Sección A.

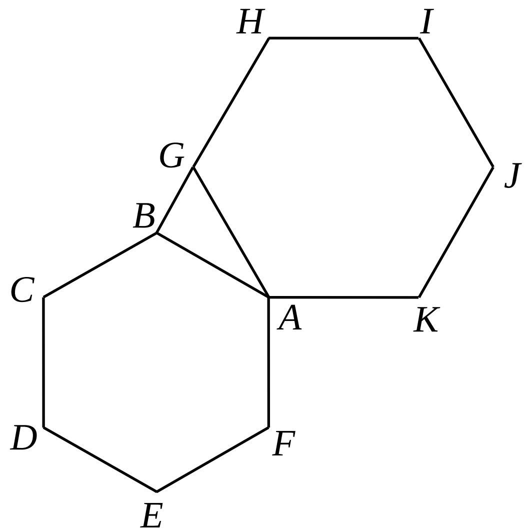
Esta sección tiene 12 preguntas. Escribe tu respuesta correcta en el espacio indicado en la hoja de respuestas. Cada respuesta correcta tiene un valor de 5 puntos.

1. Sea x un número real y $y=\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}$.
   ¿Cuál es el mínimo valor posible de y^2?

2. Un círculo de radio 1 cm se traza tocando los tres lados de un triángulo equilátero. Empezando desde ese círculo se dibujan tres secuencias infinitas de círculos menores en cada esquina del triángulo de forma que cada círculo es tangente al círculo previo y a dos de los lados del triángulo (como se ve en la figura de abajo). ¿Cuál es la suma de las circunferencias, en cm, de todos los círculos? (Considera $\pi=3.14$)



3. Sean $ABCDEF$ y $AGHIJK$ dos hexágonos regulares que no se traslapan, como se muestra en la figura. Asume que $\angle FAK=90^\circ$ y que las áreas cumplen $3\times[AGHIJK]=4\times[ABCDEF]$. ¿Cuál es la razón $[ABG]:[AGHIJK]$?
   (Nota: $[P]$ denota el área del polígono P.)



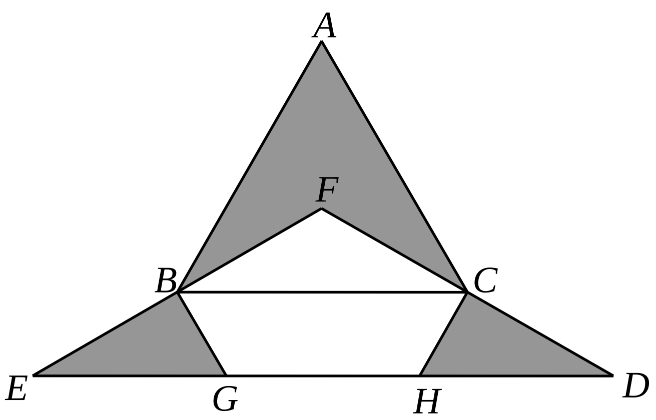
4. El número de 53-dígitos:
37,984,318,966,591,152,105,649,545,470,741,788,308,402,068,827,142,719
puede expresarse como n^{21}, donde *n* es entero positivo. ¿Cuánto vale *n*?

5. Considera la ecuación $10y^2 - 9x^{2022} = y^4$, donde *x, y* son enteros. Si *m* es el máximo posible valor de $x + y$ y *n* es el número de soluciones *(x, y)*, ¿cuál es el valor de $m + n$?

6. Sean *a, b, c* tres números reales diferentes de cero que satisfacen $a + b + c = 0$. ¿Cuál es el valor de $S = \dfrac{a^4}{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \dfrac{b^4}{b^4 - (c^2 - a^2)^2} + \dfrac{c^4}{c^4 - (a^2 - b^2)^2}$?

7. Si un número puede expresarse como $2^a + 2^b$, donde *a, b* son enteros no negativos y $a \neq b$, entonces este número se llama "número suertudo." Supongamos que todos los números suertudos están listados en orden creciente. ¿Cuál es el 64º número suertudo?

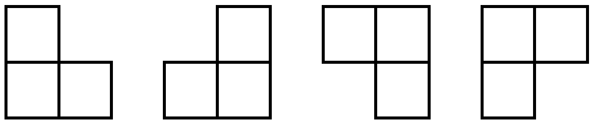
8. Sea *ABC* un triángulo equilátero cuya área es 36 cm^2, y *EFD* un triángulo isósceles con $EF = FD$. El punto *F* es el centro del triángulo *ABC*, y los puntos *B* y *C* son puntos medios de *EF* y *FD*, respectivamente, como se muestra en la figura. Si $BG \perp EF$ y $CH \perp DF$, ¿cuál es el área (en cm^2) de la región sombreada?



9. Una empresa muy secreta desarrolla una máquina de alta tecnología. Hay 20 diferentes planos que se necesitan para construirla. Cada empleado tiene acceso a exactamente 5 planos diferentes y cada combinación de 5 planos diferentes es accesible al menos a un empleado. El director de la empresa quiere distribuir a los

empleados en departamentos de forma que ningún departamento pueda construir la máquina por sí mismo. Es decir, no debe haber ningún departamento donde cada plano sea accesible por alguno de sus miembros. ¿Cuál es la mínima cantidad de departamentos que el director necesita crear?

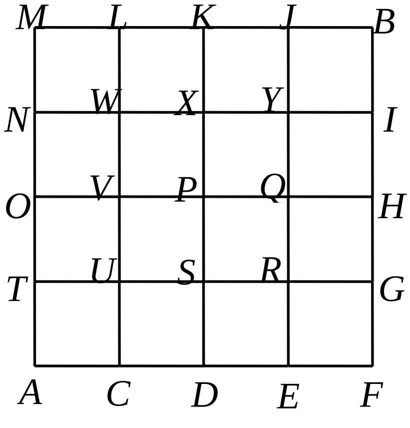
10. Un V-Triminó está formado por tres cuadritos 1×1, como lo muestra la figura:



Si los V-Triminós deben estar alineados con las casillas de un tablero, ¿cuál es la mínima cantidad de que se necesitan colocar en un tablero 8×8 de forma que no se pueda colocar un cuadrado 2×2 en el espacio restante?

11. Hay 17 cajas vacías y una cantidad infinita de pelotas. En cada paso elegimos algunas cajas y ponemos en cada caja una diferente cantidad de pelotas, donde cada cantidad debe ser una potencia de 2 (incluyendo 2 a la potencia 0). Después de k pasos, es posible que todas las cajas tengan la misma cantidad (diferente de cero) de pelotas dentro. ¿Cuál es el menor entero positivo k para lograr esto?

12. El diagrama de abajo se muestra un laberinto en la forma de cuadrícula 4×4. Una serpiente, inicialmente en la posición P, se mueve siguiendo el trayecto P-Q-R-S en un ciclo. Un ratón, inicialmente en la posición A, quiere llegar al punto B, moviéndose por el laberinto. El ratón puede solo moverse verticalmente hacia arriba y horizontalmente a la derecha. Si la serpiente y el ratón alcanzan la misma posición al mismo tiempo, la serpiente se comerá al ratón; además si los dos se cruzan en un camino, la serpiente se comerá al ratón (ambos se mueven a la misma velocidad). Dado que el ratón y la serpiente empiezan a moverse al mismo tiempo, ¿cuál es la cantidad de caminos seguros para que el ratón se mueva de A a B? (Por ejemplo, A-C-D-E-R-G-H-I-B es un camino seguro para el ratón, ya que cuando el ratón llegue al punto R, la serpiente estará en el punto P).



Equipo:____________ ***Nombre***:________________ ***ID.***: ____________

Sección B.
Responde las siguientes 3 preguntas y escribe tu solución detallada en el espacio disponible para la pregunta. Cada pregunta vale 20 puntos.

1. ¿Cuál es la cantidad de soluciones en números reales de la ecuación $x^2 - 8[x] + 7 = 0$?
   Nota: $[x]$ denota el mayor entero que no es mayor que x. Por ejemplo, $[3.14] = 3$ y $[-3.14] = -4$.

Respuesta: ________________________

Equipo:____________ ***Nombre***:________________ ***ID.***: ___________

2. Considera un hexágono regular. Paul desea pintar cada vértice del hexágono de verde, rojo o azul, de manera que no haya vértices vecinos pintados del mismo color. ¿De cuántas formas diferentes puede Paul pintar los vértices?

Respuesta: ____________________ formas

Equipo:____________ ***Nombre***:________________ ***ID.***: ____________

3. En el triángulo ABC, M es el punto medio de BC. Trazamos el círculo con centro en O que pasa por los puntos A, C y es tangente a la línea AM. La prolongación de BA interseca al círculo en D y la prolongación de CD interseca a la prolongación de MA en el punto P, como se muestra en la figura. Demuestra que $OP \perp BC$.